

S A D R Ź A J

1. UVOD	1
2. RAZVOJ HIDROMECHANIKE	3
3. KARAKTERISTIČNE FIZIČKE OSOBINE FLUIDA	9
3.1. Agregatna stanja fluida	9
3.2. Anomalije vode	11
3.3. Fizičke osobine fluida	13
3.3.1. Gustina fluida	14
3.3.2. Težina i specifična težina	15
3.3.3. Viskoznost	16
3.3.4. Stišljivost fluida	19
3.3.5. Površinski napon	21
3.3.6. Kapilarnost	24
4. HIDROSTATIKA	27
4.1. Pojam pritiska	27
4.2. Hidrostatički pritisak	29
4.3. Mjerenje pritiska	35
4.4. Sila hidrostatičkog pritiska na ravne površine	44
4.5. Određivanje hvatišta sile pritiska na ravnim površinama	52
4.6. Hidrostatička sila pritiska na zakrivljene površine	54
4.7. Arhimedov zakon	59
4.8. Riješeni zadaci iz hidrostatičke	62
5. KINEMATIKA FLUIDA	85
5.1. Uvod	85
5.2. Vrste strujanja fluida	85
5.3. Lagrangeov pristup opisivanja kretanja fluida	89
5.4. Eulerov pristup opisivanja kretanja fluida	90
5.5. Trajektorije, strujnice, strujne površi, strujno vlakno i strujna cijev	91
5.6. Protok	94
5.7. Jednačina kontinuiteta	97
5.8. Riješeni zadaci iz kinematike fluida	99
6. DINAMIKA FLUIDA	101
6.1. Uvod	101
6.2. Osnovne dinamičke jednačine strujanja tečnosti	103
6.2.1. Jednačina održanja količine kretanja	103
6.2.2. Bernoullieva jednačina	105
6.2.2.1. Rad i energija	105
6.2.2.2. Istjecanje iz rezervoara	106
6.2.2.3. Bernoullieva jednačina idealnog fluida	108
6.2.2.4. Bernoullieva jednačina realnog fluida	110
6.2.2.5. Hidrodinamički otpori	111
6.2.2.6. Hidrodinamički gubici	121

6.2.2.6.1. Linijski gubici fluidne energije	121
6.2.2.6.2. Lokalni gubici fluidne energije	123
6.3. Primjena Bernoullieve jednačine	129
6.3.1. Pitotova cijev	130
6.3.2. Venturieva cijev (Venturimetar)	131
6.3.3. Istjecanje iz velikog rezervoara	134
6.3.4. Sifon	135
6.4. Hidraulički proračun cjevovoda	137
6.4.1. Hidraulički proračun uz poznavanje protoka Q i prečnika cijevi D	138
6.4.2. Hidraulički proračun uz poznavanje protoka Q i brzine tečenja v	138
6.4.3. Hidraulički proračun uz poznavanje prečnika cijevi D i brzine v	139
6.5. Crtanje energetske i pijezometarske linije	139
6.6. Pumpe	142
6.6.1. Centrifugalna pumpa	144
<u>6.7. Riješeni zadaci iz dinamike fluida</u>	147
7. ISTJECANJE TEČNOSTI KROZ OTVORE	186
7.1. Istjecanje kroz male otvore – nepotopljeno istjecanje	186
7.2. Istjecanje kroz male otvore – potopljeno istjecanje	190
7.3. Istjecanje kroz mali otvor iz posuda pod pritiskom	191
7.4. Istjecanje kroz veliki otvor	192
7.5. Nestacionarno (neustaljeno) istjecanje	194
8. TEČENJE U OTVORENIM KANALIMA	196
8.1. Uvod	196
8.2. Specifična energija presjeka i vrste tečenja	198
8.3. Jednoliko ustaljeno tečenje	202
8.4. Nejednoliko ustaljeno tečenje u prizmatičnim kanalima (koritima)	206
8.5. Nejednoliko ustaljeno tečenje u neprizmatičnim kanalima (koritima)	208
8.6. Nestacionarno (neustaljeno) tečenje	210
<u>8.7. Riješeni zadaci iz otvorenih kanala</u>	211
9. ISTJECANJE TEČNOSTI PREKO PRELIVA	221
9.1. Uvod	221
9.2. Oštrobridni (oštrovični) preliv	222
9.3. Preliv sa širokim pragom	224
9.4. Preliv praktičnog profila	225
10. ISTJECANJE TEČNOSTI ISPOD USTAVE	228
10.1. Nepotopljeno istjecanje ispod ustave	228
10.2. Potopljeno istjecanje ispod ustave	229
10.3. Hidraulički skok	230
11. KRETANJE PODZEMNIH VODA	233
11.1. Uvod	233
11.2. Pritisak vode u tlu, hidraulički potencijal i hidraulički gradijent	235
11.3. Zakon laminarnog tečenja	237
11.4. Strujna mreža	239

11.5. Strujanje podzemne vode ka vodozahvatima	243
<u>11.6. Riješeni zadaci iz filtracije podzemnih voda</u>	252
12. PRILOZI	265
LITERATURA	268
O AUTORU	269

1. UVOD

Građevinska djelatnost je jedna od najstarijih i sigurno najznačajnijih tehničkih grana. Građevinarstvo se bavi radovima potrebnim za izgradnju objekata visokogradnje, objekata niskogradnje, a naročito puteva, tunela i mostova, dok poseban značaj građevinarstvo ima u oblasti hidrotehnike i rješavanju mnogih hidrotehničkih problema koji su vezani za projektovanje i gradnju objekata visokogradnje i objekata niskogradnje. Najčešći radovi iz oblasti hidrotehnike su izvođenje regulacije vodotoka, gradnja vodovodnih i kanalizacijskih sistema, iskorištavanje vodne snage gradnjom hidrocentraža kao i drugi radovi potrebni za dobrobit i razvoj jednog društva. Hidrotehnika ima svoj značaj u upravljanju vodnim resursima i općenito hidrotehnika se bavi hidrotehničkim građevinama i hidrotehničkim sistemima uz obavezno vođenje računa o zaštiti prirodne okoline što je naročito aktualno i značajno u posljednje vrijeme. Radove iz oblasti projektovanja i građenja raznih hidrotehničkih građevina i sistema je nezamislivo planirati i izvoditi bez znanja iz oblasti hidrologije i hidromehanike. Uopšteno gledajući, voda je neophodna za opstanak svih živih organizama i danas je nezamisliva za tehnički i tehnološki razvoj i napredak. Nedovoljne količine pitke vode na jednom širem području su velika prepreka ekonomskog razvoja društva. Naravno, osim kvantiteta vode veoma je važan i kvalitet voda koji se, na žalost, sve više pogoršava razvojem tehnike, različitih tehnoloških procesa i društva u cjelini, što dovodi do značajnog zagađenja površinskih tokova, podzemnih voda i tla. Iz tog razloga, potrebno je i kvalitetno upravljanje i odvodnja svih otpadnih voda za šta nam trebaju znanja iz hidromehanike. Naime, od početka izgradnje prvih naselja, preko antičkog doba, srednjeg vijeka do današnjih vremena, veoma često su se javljali sukobi zbog nedostatka dovoljnih količina pitke vode, tako da nije isključeno da se u skorijoj budućnosti vode ratovi za vodu, kao što se danas vode za naftu.

Hidromehanika je grana hidraulike koja proučava sile i kretanja tečnosti. U hidrotehničkoj praksi gasove i tečnosti zovemo zajedničkim imenom – **fluidi**. Prirodni okoliš gdje se odvija određena fizička promjena nazivamo medijem, a ukoliko se takav medij kreće ili miruje, onda ga zovemo fluidom. Fluidi predstavljaju bilo koju vrstu materije koja se kreće ili miruje kao što su tečnosti, gasovi, električna energija i slično.

Hidromehanika je dio mehanike koja je sastavni dio fizike kao naučne discipline, a mehanika se obično dijeli na mehaniku čvrstih tijela i mehaniku fluida. Naziv hidromehanika dolazi od grčke riječi *hydor* što znači voda. Međutim, globalno gledajući ovaj naziv nije potpuno ispravan, jer danas ova nauka ne proučava samo vodu kao osnovni prirodni materijal već se odnosi i na druge tečnosti i gasove odnosno fluide, jer pod nestišljivim fluidima smatramo one tečnosti i gasove gdje se fenomen stišljivosti odnosno kompresibilnosti može zanemariti do neke određene granice.

U ovom udžbeniku prezentirana su osnovna saznanja iz hidromehanike. Uz teoretska saznanja dati su konkretno i detaljno urađeni računski primjeri iz

pojedinih oblasti ove nauke. Tako, pored izlaganja osnovnih i neophodnih pojmova i riješenih zadataka iz oblasti hidrostatičke odnosno određivanja hidrostatičkog pritiska, razdiobe dijagrama hidrostatičkog pritiska na vertikalnu i horizontalnu komponentu, određivanja ukupne hidrostatičke sile pritiska kao i sile uzgona, u ovom udžbeniku proučavaju se i opšti zakoni kretanja tečnosti odnosno kinematike i dinamike tečnosti, i to vrste kretanja elementarnog djelića tečnosti, jednačina kontinuiteta, vrste tečenja (ustaljeno-stacionarno i neustaljeno-nestacionarno, jednoliko i nejednoliko, vrtložno i bezvrtložno) kao i osnovni kinematski elementi kao što je putanja, strujnica i strujna cijev. Posebna pažnja posvećena je dinamičkoj jednačini tečenja odnosno jednačini koja izražava zakon održanja količine kretanja i Bernoullievoj jednačini za idealnu i za realnu tečnost kao i tečenju pod pritiskom u cijevima i isticanju kroz male i velike otvore, te tečenju sa slobodnom površinom (ustaljeno tečenje jednoliko i nejednoliko u prizmatičnim kanalima i nejednoliko u neprizmatičnim kanalima i neustaljeno tečenje).

U poglavlju udžbenika gdje se objašnjava tečenje sa slobodnom površinom definirani se pojmovi specifične energije presjeka kanala odnosno vodotoka kao i mirnog, burnog i kritičnog tečenja. U poglavlju istjecanja ispod zatvarača promatrano je potopljeno i nepotopljeno istjecanje sa uslovima ravnog dna. Razmatra se hidraulički skok odnosno spregnuta dubina, način spajanja vodnih nivoa u zavisnosti od protoka, oblika objekta i nizvodnih uslova u kanalu te u zavisnosti od položaja vodnog skoka u odnosu na objekat.

Na kraju udžbenika data su teoretska razmatranja sa praktičnim primjerima tečenja ili strujanja podzemnih voda sa definisanim osnovnim pretpostavkama i pojmovima kao što je Darcyev zakon laminarnog procjeđivanja, objašnjenje temeljne Dupuitove postavke i data analiza dotjecanja podzemnih voda prema vodozahvatnim objektima (potpuni i nepotpuni obični, arteški i subarteški bunari kao i horizontalne galerije).

Udžbenik predstavlja dobru podlogu i bazu za izučavanje predmeta Hidromehanika odnosno Mehanika fluida na građevinskom fakultetu te daje potrebna saznanja iz teorije i praktičnih riješenih zadataka za ostale hidrotehničke nastavne predmete na dodiplomskom i diplomskom studiju. Osim toga, zahvaljujući detaljno riješenim zadacima iz oblasti hidrostatičke, hidrodinamike, tečenja u otvorenim kanalima i strujanju podzemnih voda, udžbenik može poslužiti građevinskim inženjerima projektantima i izvođačima radova pri rješavanju nekih konkretnih primjera hidrostatičkog ili hidrodinamičkog pritiska vode ili drugih tečnosti na građevinske objekte ili sastavne dijelove građevinskih konstrukcija.

2. RAZVOJ HIDROMECHANIKE

Na osnovu dosadašnjih arheoloških nalaza u raznim dijelovima svijeta možemo reći da još od prahistorije čovjek svojim iskustvom i kasnije usvojenim saznanjima, rješava mnoge probleme iz oblasti hidromehanike. Najbolji primjer za ovu tvrdnju je izum splava, čamca, vesla i jedra, a kasnije gradnja kanala kao i navodnjavanje i odvodnjavanje određenih površina terena. Još od davnina čovjek je izumio vodeničko kolo i prvobitnu i primitivnu vjetrenjaču.

Razvojem čovječanstva i početkom gradnje prvih stambenih naselja u srednjem kamenom dobu (mezolit) počinje i gradnja prvih sistema za vodosnabdijevanje, te su danas poznati podaci o gradnji vodovoda oko 3000 godina p.n.e., kao na primjer u Starom Egiptu gdje osim gradnje monumentalnih građevina od kamena i faraonskih palača, postoje podaci o gradnji bunara dubine oko 200 m i prečnika do 4 m, pa možemo reći da podizanje vode sa tih dubina bilo je poznato u Starom Egiptu, Babilonu i Staroj Kini i tada su koristili uređaje sa vitlima. U doba Mezopotamije na obalama rijeka Tigris i Eufrat grade se naselja i gradovi (Babilon, Ašur, Nipur itd) na visokim zemljanim terasama nepravilnog četverougla radi zaštite od poplava te se grade i sistemi za navodnjavanje i tzv. Babilonski viseći vrtovi (slika 2.1).



Slika 2.1. Babilonski viseći vrtovi

Danas imamo sačuvane ostatke vodovoda izgrađenog 1000 godina p.n.e. u Jeruzalemu. U doba Starog Rima i Stare Grčke vodovodni sistemi su bili dosta razvijeni te su se gradili hidraulički tuneli i mostovi za transport vode.



Slika 2.2. Tunel antičkog vodovoda prije restauracije



Slika 2.3. Tunel antičkog vodovoda poslije restauracije

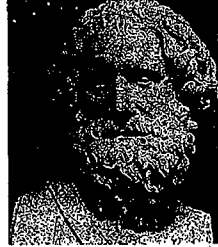
Jedan od najpoznatijih vodovodnih hidrauličkih tunela bio je dužine 1000 m i služio je za snabdijevanje grada Samosa (550 godina p.n.e.).

Grčki filozofi su prvi napisali tumačenja određenih pojava iz hidromehanike. Aristotel (384. do 322. godine p.n.e.) bavio se kretanjem tijela kroz vazduh i vodu te je došao do zaključka da je otpor koji medij pruža kretanju tijela proporcionalan gustini medija.

Za Arhimeda iz Sirakuze (287. do 212. godine p.n.e.) možemo reći da je ospivač hidrostatike, jer je postavio osnovna načela o uzgonu kao i načela o tijelima koja plutaju na površini vode ili su uronjena u vodu.



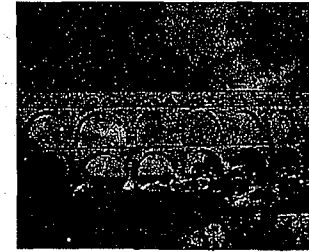
Slika 2.4 Aristotel



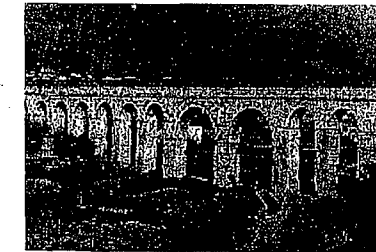
Slika 2.5 Arhimed

Tokom razvoja hidromehanike bilo je mnogo naučnika koji su dali značajan doprinos ovoj grani mehanike. Jedan od njih je Heron iz Aleksandrije (period između 250. i 150 godine p.n.e.) koji je prikazao metod i postupak kojim je moguće izračunati količinu vode koja protiče kroz cijev te je ostavio pisane zapise o pneumatici. U vrijeme Stare Grčke došlo se do značajnih otkrića i saznanja u oblasti hidromehanike. Dolaskom Rimljana nije došlo do bitnijeg naučnog napretka i razvoja hidromehanike nego su Rimljani preuzeli dotadašnja saznanja iz ove oblasti od Grka. U doba Starog Rima, na osnovu već postignutih spoznaja hidromehanike, izgrađeni su vodovodni sistemi kao i kanalizacioni sistemi u tadašnjim gradovima. Jedan od najznačajnijih hidrograđevinskih objekata tog doba je akvadukt Pont du Gard u Francuskoj koji služi za transport vode za vodosnabdjevanje tadašnjih naselja, kao i ostaci drugih akvadukta koji su do današnjih dana sačuvani.

Najznačajniji pisani rad iz doba Starog Rima koji se bavi hidromehanicom je autora Vitruvija Marka (1 vijek p.n.e.) koji je samo kompletirao tadašnja grčka znanja iz ove oblasti. Na području našeg regiona odnosno bivše Jugoslavije izgrađen je rimski vodovod za snabdjevanje Dioklecijanove palače u današnjem Splitu kao i akvadukt koji se i danas nalazi u ovom gradu (slika 2.7).



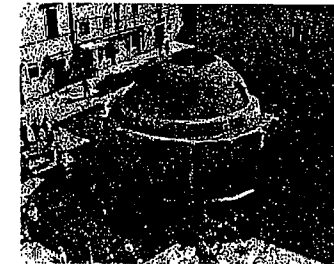
Slika 2.6. Akvadukt Pont du Gard



Slika 2.7. Rimski akvadukt u Splitu

Nakon propasti Rimskog carstva, na području Evrope nauka i naučna saznanja su gotovo hiljadu godina bila u potpunoj štagnaciji, a neka naučna saznanja Starih Grka iz oblasti hidromehanike su bila i zaboravljena. Nasuprot tome, u arapskim zemljama dolazi do razvoja i usavršavanja hidrauličkih mašina i znanja iz oblasti hidromehanike, te su znatno poboljšani vodovodni sistemi, usavršeno je vodeničko kolo i vjetrenjača.

U srednjem vijeku dolazi do potpunog zastoja razvoja hidromehanike, a naročito razvoja i usavršavanja gradnje objekata i sistema za vodosnabdjevanje naselja. U našem najbližem okruženju bila je značajna gradnja vodovoda u Dubrovniku tokom 1436. godine, a nakon ovog vodovoda izgrađena je velika Onofrijeva česma u centru Dubrovnika (slika 2.8).



Slika 2.8. Velika Onofrijeva česma u Dubrovniku



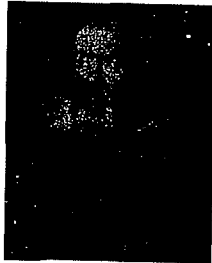
Hidromehanika počinje svoj novi razvoj u 15. vijeku, u doba renesanse, gdje je najznačajniji doprinos dao Leonardo da Vinci (1452. do 1519. godina). Leonardo da Vinci, koji je bio vrstan slikar, izumitelj, kipar i matematičar, koji je na osnovu promatranja prirodnih pojava i eksperimenata opisao pojave hidrostatike i hidrodinamike, i prvi je postavio princip zakona kontinuiteta, rastumačio protjecanje u otvorenim kanalima, raspodjelu brzina u vrtložnom toku kao i putanju slobodnog mlaza tečnosti. Takođe, Leonardo da Vinci je napravio nacрте mnogih hidrauličkih mašina i naprava, a posebno se ističe centrifugalna pumpa.

U periodu od 15-og vijeka do polovine 17-og vijeka radovi iz hidromehanike su se zasnivali na eksperimentima i promatranju pojava u prirodi. Osim Leonarda

da Vincija, hidrostatikom se bavio i Galileo Galilei (1564. do 1642. godine) koji je proučavanjem slobodnog pada čvrstog tijela došao do zaključka da otpor vazduha kretanju tijela raste sa brzinom tijela i gustinom medija. U ovom periodu Evangelista Torricelli (1608. do 1647. godine) postavio je poznati zakon istjecanja vodenog mlaza iz rezervoara ili neke posude (danas često u upotrebi Torricelli-ev izraz), a osim toga Torricelli je pronalazač barometra (uređaj ili instrument za mjerenje atmosferskog pritiska).



Slika 2.9. Leonardo da Vinči



Slika 2.10. Galileo Galilei



Slika 2.11. Evangelista Torricelli

Holandski fizičar i matematičar Simon Stevin (1548. do 1620. godine) odredio je pritisak kojim tečnosti djeluju na ravnu i čvrstu podlogu te je protumačio tzv. hidrostatički paradoks da pritisak tečnosti na dno posude u kojoj se nalazi zavisi od visine tečnosti u toj posudi, a ne od oblika posude. Edme Mariotte (1620. do 1684. godine) napisao je radove o kretanju fluida obrađujući fluide i sile kojima fluidi u kretanju djeluju na čvrste stijenke cijevi na jedan potpuno novi način. Međutim, hidromehanika odnosno mehanika fluida se nije mogla razvijati samo na eksperimentima i određenim zapažanjima u prirodi i tokom vršenja eksperimenata, već je trebao određeni razvoj i napredak u matematici koji bi kvalitetno opisao sve te pojave. U prvoj polovini 17. vijeka dolazi do mogućnosti daljeg razvoja hidromehanike na osnovu postavljanja temelja analitičke geometrije (R. Descartes) i dalje razvoja infinitezimalnog računa (J. Wallis i G. W. Leibniz).

Blaise Pascal (1623. do 1662. godine) je dokazao da u mirnoj tečnosti pritisak djeluju jednako u svim pravcima, dok je Isaac Newton (1642. do 1727. godine) došao do osnovnih načela integralnog računa te ga primjenio za matematički opis hidrodinamičkih pojava. Isaac Newton uveo je pojam viskoznosti tečnosti, ispitaio otpor fluida dejstvu viskoznih, inerijalnih i gravitacijskih sila, te analizirao kretanje fluida na osnovu principa količine kretanja i došao do otkrića kontrakcije slobodnog mlaza tečnosti. Johann Bernoulli (1667. do 1748. godine) definisao je pojam unutrašnjeg pritiska u fluidu.



Slika 2.12. Blaise Pascal



Slika 2.13. Isaac Newton

Matematika se na kraju 17-og vijeka toliko razvila da su se matematički mogli opisati osnovni zakoni kretanja tečnosti, te tokom 18 vijeka Daniel Bernoulli (1700. do 1782. godine) postavlja osnove i temelje današnje hidromehanike. Međutim, Leonhard Euler (1707. do 1783. godine) je napisao dosta originalnih radova o primjeni matematičke analize u mehanici fluida tako da se on smatra osnivačem savremene hidrodinamike. L. Euler je, između ostalog, razjasnio dejstvo pritiska u tečnosti koja se kreće, uveo je pojam kavitacije i definisao osnovne jednačine kretanja tečnosti. I Daniel Bernoulli i Leonhard Euler rođeni su u Švicarskoj i bavili su se matematikom i fizikom.



Slika 2.14. Daniel Bernoulli



Slika 2.15. Leonhard Euler

Tokom 18-og vijeka razvijene su metode matematičke analize kretanja tečnosti. Međutim, tadašnji inženjeri nisu dobro poznavali matematiku te nisu razumjeli teotiju kretanja tečnosti postavljenu od strane D. Bernoulli-ja i L. Euler-a, pa su i dalje probleme u praksi rješavali na osnovu osmatranja i opažanja određene pojave i na osnovu eksperimenata. Na taj način, hidrodinamika i hidraulika se razvijaju potpuno odvojena jedna od druge. Hidraulika postaje inženjersko umijeće dok hidrodinamika postaje matematička disciplina. Giovanni Battista Venturi (1746. do 1822. godine) je razmatrao otpor strujanja vode u cijevima, te je izumio tzv. Venturijevu cijev – uređaj za mjerenje protoka.

William Froude (1810. do 1879. godine) napravio je bazen za ispitivanje brodskih modela, a u toku 19 vijeka bila je dosta razvijena tehnika ispitivanja modela u umanjenom mjerilu i pod odgovarajućim uslovima. Usavršena mjerna

tehnika omogućila je znatno poboljšanje do tada postojećih obrazaca i formula za konkretno i praktično rješavanje inženjerskih problema. Gaspard Gustave de Coriolis (1792. do 1843. godine), Henry Emile Bazin (1829. do 1917. godine) i Robert Manning (1816. do 1897. godine) su na osnovu mjerenih podataka i eksperimenata dali nove formule tečenja vode u otvorenim kanalima i riječnim tokovima, dok poboljšane i nove matematičke izraze za opisivanje kretanja tečnosti dali su Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797. do 1884. godine) i Henry Philibert Gaspard Darcy (1803. do 1858. godine).



Slika 2.16. G. B. Venturi



Slika 2.17. Robert Manning



Slika 2.18. H. P. G. Darcy

I u toku 19-og vijeka hidrodinamika dosta napreduje. Claude Louis Marie Henri Navier (1785. do 1836. godine) je preuredio i modifikovao Eulerove jednačine kretanja tečnosti na taj način što je uzeo u obzir i dejstvo molekularnih sila. Sir George Gabriel Stokes (1819. do 1903. godine) uveo je viskoznost u Navierove jednačine, te tako danas imamo Navier-Stokesove jednačine za kretanje viskoznog fluida koje govore da otpor trenja viskoznog fluida zavisi od vrste tečenja. Osborne Reynolds (1842. do 1912. godine) uvodi jednačinu turbulentnog tečenja i daje parametre za viskozno tečenje. Tokom 19-og vijeka napisano je mnogo radova sa novim analitičkim izrazima za razne vrste i tipove tečenja fluida.

Početkom 20-og vijeka dolazi do spajanja eksperimentalnih istraživanja sa analitičkim izrazima i metodama, te nastaje naučna disciplina koja se zove hidromehanika odnosno mehanika fluida. Osnivačem današnje savremene hidromehanike, odnosno mehanike fluida smatra se Ludwig Prandtl (1875. do 1953. godine) koji je poznat po teoriji graničnog sloja.



Slika 2.19. C. L. M. H. Navier



Slika 2.20. G. G. Stokes



Slika 2.21. Ludwig Prandtl

3. KARAKTERISTIČNE FIZIČKE OSOBINE FLUIDA

3.1. AGREGATNA STANJA FLUIDA

Poznata su tri agregatna stanja fluida i to čvrsto, tečno i gasovito stanje. U čvrstom stanju imamo stalan oblik i stalnu zapreminu, u tečnom stanju može biti stalan oblik i zapremina dok u gasovitom stanju nemamo stalan oblik niti stalnu zapreminu. Odnedavno, prema nekim autorima i istraživačima, postoji i četvrto agregatno stanje koje nazivamo plazma. Plazma je materija u gasovitom stanju izložena visokim pritiskom da je nastupila ionizacija i disocijacija, te se plazma sastoji od slobodnih elektrona i iona. U hidromehanici nećemo izučavati plazmu kao četvrto agregatno stanje fluida, jer to stanje opisuje pojave koje pripadaju oblasti aerohemije i termohemije.

U čvrstom stanju atomi se nalaze relativno blizu jedni prema drugima i privlačne ili odbojne sile dozvoljavaju atomima samo da osciluju oko ravnotežnih položaja, ali ne mijenjaju mjesto na kome se nalaze. U tečnom stanju molekuli se nalaze relativno blizu jedni drugima (slično kao u čvrstom stanju), ali se mogu pomjerati u prostoru kroz tečnost. Međumolekularne sile u tečnom stanju su samo privlačne i ne dopuštaju molekulima da lako napuste tečnost. Tečnost se opire sabijanju, ali se i lako deformiše odnosno mijenja svoj oblik, tako da tečnost u nekoj posudi upravo poprima oblik te posude. U gasovitom stanju molekuli su udaljeni jedni od drugih i sile koje djeluju među njima su dosta slabe izuzev kada dođe do sudara molekula. U gasovitom stanju molekuli su neotporni na deformaciju smicanja, te oni mogu da teku ili da se zbijaju.

Fluidi, odnosno tečnosti i gasovi zauzimaju i poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze, a čvrsta tijela zadržavaju svoj oblik, odnosno prilikom dejstva na čvrsto tijelo nailazimo na otpor promjeni oblika tog čvrstog tijela dok oblik zapremine fluida možemo mijenjati. Prilikom mijenjanja oblika fluida javljaju se sile otpora deformaciji i te sile su proporcionalne brzini deformacije tako da kada se brzina deformacije približava vrijednosti nula i te sile otpora deformaciji se smanjuju. Znači da kada nema kretanja onda nema sila otpora, odnosno kada prestane kretanje fluida tada nestaju i sile otpora, ali se fluid neće vratiti u prvobitno stanje.

Kada je riječ o vodi kao materiji kojom se najviše bavi i koju najviše izučava hidromehanika i kojom se najviše bavimo u hidrotehničkoj građevinskoj praksi, može se slobodno reći da je voda jedan od najvažnijih uslova postojanja živog svijeta. Voda predstavlja hemijski spoj dva atoma vodonika i jednog atoma kiseonika sa hemijskom formulom H_2O (slika 3.1). Takođe, voda ima tačku leđišta na $0^\circ C$ (273 K) i tačku vrelišta na $100^\circ C$ (373 K), dok se u tečnom stanju nalazi između $0^\circ C$ i $100^\circ C$.

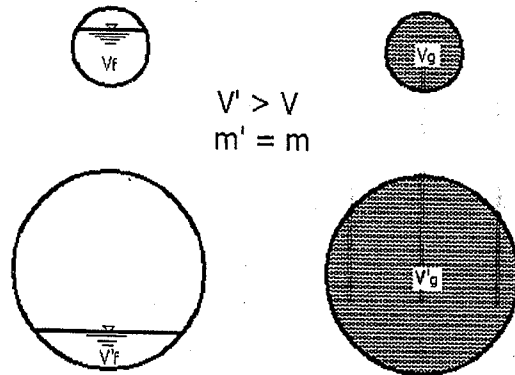


Slika 3.1. Molekul vode

Naime, neku preciznu granicu između čvrstih tijela i fluida (tečnosti i gasovi) nije teško postaviti. Veliki broj tijela prilikom zagrijavanja prelaze iz čvrstog stanja u tečno stanje i kasnije u gasovito stanje. Kod fluida razlikujemo tečnosti od gasova tako što tečnosti lako mijenjaju oblik, a teško zapreminu. Gasovi i oblik i zapreminu mijenjaju dosta lako. Ovo nam govori o tome da tečnosti i gasove možemo razlikovati po stišljivosti ili kompresibilnosti.

Tečnosti su praktično nestišljive, a kohezija drži molekule tečnosti na okupu. Gasovi su veoma stišljivi i u ravnoteži su samo kada su potpuno zatvoreni, a to znači da gas u potpunosti ispunjava posudu u kojoj se nalazi (slika 3.2. b). Poznato je da svaki gas se može pretvoriti u tečnost uz postojanje velikih promjena pritiska i temperature.

Fluide prema agregatnom stanju dijelimo na tečnosti i gasove. Tečnosti imaju sposobnost formiranja slobodne površine. Zanimljiv je i pojam pare koja predstavlja gasovito stanje tečnosti. Para može nastati isparavanjem vode ili sublimacijom leda. Zasićene pare su gasovi koji kod najmanje promjene temperature i pritiska prelaze u tečnost. Gasovi predstavljaju veoma pregrijane pare i molekuli gasova su u stalnom kretanju pri kojem dolazi do sudaranja što dovodi do širenja gasova sve do potpunog ispunjavanja raspoloživog i ograničenog prostora (slika 3.2).

Slika 3.2. Fluidi u mirovanju koje ispunjavaju dvije cijevi različitih zapremina
a) tečnost b) gas

3.2. ANOMALIJE VODE

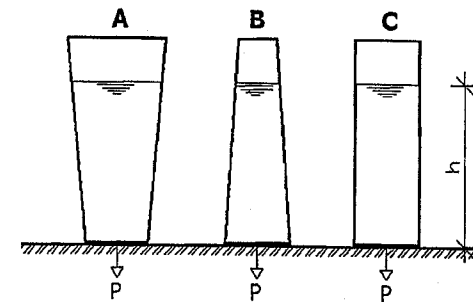
Anomalija određene materije ili pojave predstavlja u suštini njen pravi opis i karakter. Voda posjeduje veliki broj anomalija i sigurno zauzima prvo mjesto na listi anomalnosti i neobičnosti.

Kada govorimo o anomalijama vode možemo reći da je promjena gustine pri zamrzavanju jedna od osnovnih anomalija. Naime, voda što je hladnija ima sve manju gustinu tako da do $+4^{\circ}\text{C}$ voda se hlađenjem skuplja kao i druga tijela u prirodi. Ako vodu hladimo dalje odnosno ispod $+4^{\circ}\text{C}$ onda ona počinje da se širi, te na 0°C se potpuno zaledi i očvrsla voda (led) ima zapreminu za oko 9% veću nego prije početka hlađenja. Prema ovom „širenju“ odnosno povećanju zapremine vode u čvrstom stanju često, u praksi, dolazi do pucanja vodovodnih cijevi, jer led pritišće zidove cijevi silom znatnog intenziteta koja uspijeva da ostvari pucanje cijevi ili nekih posuda. Takođe, ovim načinom voda razara i raspucale stijene te tako oblikuje reljef planete. Na osnovu ove anomalije vode, treba istaknuti i pojavu da led pliva na vodi što znači da mu je gustina manja nego gustina vode u tečnom stanju.

Voda u čvrstom stanju traži znatnu količinu toplote za otapanje, a prilikom mržnjenja ta toplota se vraća okolini i to na određeni način utiče na klimatske promjene i na živi svijet u pozitivnom smislu.

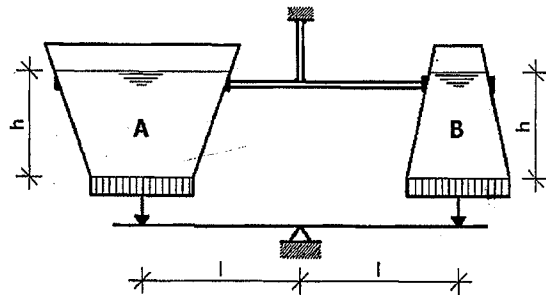
Jedna od neobičnosti vode je tzv. **hidrostatički paradoks**, koji važi i za druge tečnosti. Hidrostatički paradoks se može objasniti na slijedeći način:

Imamo tri posude čija su dna identična (slika 3.3), ali su oblici posuda različiti. U sve tri posude je nasuta voda (ili druga tečnost) do iste visine h . Znači, u posudama se zbog različitog oblika nalaze različite količine vode. Hidrostatički paradoks se ogleda u tome da je pritisak vode (ili druge tečnosti) na dno bilo koje od tri posude isti odnosno pritisak tečnosti na dno posude zavisi samo od visine ili dubine tečnosti u posudi, a ne od oblika posude, što znači da pritisak tečnosti na dno posude ne zavisi od ukupne količine tečnosti u posudi. Sa slóvom P je označen intenzitet sile hidrostatičkog pritiska na dno posude.



Slika 3.3. Hidrostatički paradoks

Ako imamo posudu A koja se prema vrhu širi i imamo posudu B koja se prema vrhu sužava i dna ovih posuda su pokretna (kao kod klipa koji se može vertikalno pomjerati) – slika 3.4. Obje posude su učvršćene tako da se samo mogu dna pomjerati (klipovi). Dna posuda (klipovi) su oslonjeni na krajeve jednokrake poluge koja je vrsta vage. Masa praznih posuda je ista i dna obe posude imaju istu površinu, a u obe posude je nasuta tečnost do iste visine h . Sa slike je očigledno da u posudi A ima više tečnosti nego u posudi B. Međutim, pošto je visina tečnosti ista u obje posude to je i pritisak na dna tih posuda (klipovi) isti, a pošto su iste površine dna posuda onda je i ukupna sila koja djeluje na dno posude A jednaka ukupnoj sili koja djeluje na dno posude B.



Slika 3.4. Hidrostatički paradoks sa pokretnim dnom posuda

Voda ima čak 67 anomalija, a najvažnije su:

- voda ima najveću gustinu na $+4^{\circ}\text{C}$,
- pri zagrijavanju od 0°C do $+4^{\circ}\text{C}$ zapremina vode se ne povećava kao kod drugih materija već se smanjuje,
- pri zamrzavanju voda se „širi“ i povećava joj se zapremina, a ne skuplja se kao ostala tijela i materije,
- tačka ledišta vode povećanjem pritiska opada,
- voda ima veću specifičnu toplotu u odnosu na druge tečnosti i na sva čvrsta tijela,
- voda ima veliku dielektričnu konstantu pa je veoma dobar rastvarač u odnosu na druge tečnosti,
- voda ima najveći površinski napon nakon žive,
- najstabilnija temperatura vode je 36°C (to je temperatura ljudskog tijela).

Bez ovih anomalija vode ne bi bilo ni živog svijeta na Zemlji. Kao što se iz navedenih anomalija može vidjeti, voda je i snažan rastvarač i nikada u prirodi ne postoji samo molekul H_2O , već se u vodi nalazi znatan broj minerala i drugih korisnih materija.

3.3. FIZIČKE OSOBINE FLUIDA

Fizičke osobine fluida mogu se povezati sa jednom tačkom unutar mase fluida ili se mogu povezati sa konačnom količinom nekog fluida. Masa i zapremina spadaju u osnovne osobine konačne količine fluida te se mogu odrediti mjerenjem, na primjer sipanjem vode u neku posudu možemo odrediti i izmjeriti masu vode u posudi.

Za razliku od konačne količine fluida, osobine fluida koje su vezane za jednu tačku nisu u ovisnosti od cijele odnosno ukupne količine fluida. Naime, ako u posudi sa vodom mjerimo temperaturu vode u jednoj tački i u tu posudu sipamo novu količinu vode onda se možda temperatura promijeni i to zbog procesa difuzije (nasumično kretanje pojedinih čestica u fluidu) i konvekcije (usmjereno kretanje fluida – topliji fluid kreće se prema hladnijem i predaje toplotu okolini), a nikako zbog povećanja mase. Ako iz posude sa vodom u kojoj mjerimo temperaturu u jednoj tački odlijemo određenu količinu vode, temperatura vode se neće promijeniti.

U hidromehanici, odnosno u hidrodinamici gdje proučavamo kretanje fluida, znatno lakše je rješavati probleme koji su vezani za jednu tačku nego za cijelu odnosno ukupnu količinu fluida. Upravo iz tih razloga, poznavanje osnovnih fizičkih osobina fluida u bilo kojoj tački i u bilo kom trenutku vremena predstavljaju jedan od najvažnijih zadataka hidromehanike.

U hidromehanici fluidi se smatraju kontinuumom, odnosno smatra se da je materija neprekidno raspoređena u prostoru koji zauzima. Ovo se može smatrati ispravnim polaznim stajalištem pri izučavanju hidromehanike, jer fluidi sadrže veoma veliki broj molekula, te slobodno možemo smatrati da u fluidu nema nikakvih praznina.

U hidromehanici se pretpostavlja da su fluidi **homogeni** i da su fizičke osobine i najmanje čestice u cijelom prostoru koje fluid zauzima potpuno jednake. Drugim riječima, to znači da je homogen onaj fluid u kome nema drugih materija i drugih fluida niti drugih agregatnih stanja.

Osim homogenosti veoma važan pojam je izotropnost fluida. **Izotropan** je onaj fluid kojem se osobine ne mijenjaju ni u jednom smjeru.

Da bismo lakše razumijeli osnovne postulate i zakonitosti mehanike fluida potrebno je da razmotrimo pojam fluidne čestice. **Fluidna čestica (djelić)** predstavlja izuzetno malu količinu fluida odnosno elementarnu zapreminu fluida te je potpuno svejedno kakav oblik ima ta elementarna zapremina fluida odnosno fluidna čestica. Zapremina i oblik elementarne zapremine fluida se mogu mijenjati, ali masa fluidne čestice ostaje konstantna odnosno ista.

Stišljivost ili kompresibilnost fluida koristimo, između ostalog, za određivanje razlike između tečnosti i gasova. Općenito uzevši, fluidi su stišljivi, ali tečnosti su u neznatnoj mjeri stišljive te ih smatramo nestišljivima, što u suštini znači da gustina tečnosti ne zavisi od pritiska pod određenim uslovima, a stišljivost tečnosti se smanjuje porastom pritiska i temperature. Nasuprot tome, stišljivost gasova je veoma velika.

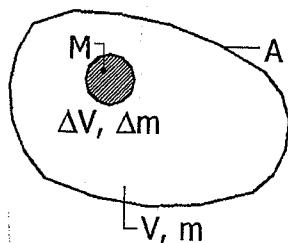
3.3.1. Gustina fluida

Gustina fluida spada u fizičke veličine kojom se pokazuje raspodjela mase fluida u zapremini. Pošto se masa i zapremina fluida ili, na primjer, neke tečnosti vezuju za konačnu količinu tog fluida ili tečnosti onda srednja gustina homogene tečnosti predstavlja odnos između mase m (kg) i zapremine V (m³) i glasi:

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V} \quad (\text{kg/m}^3) \quad (3.1)$$

Ako u elementarnom dijelu fluida koji ima veoma malu zapreminu ΔV i masu Δm , nalazi tačka M koja ostaje unutar elementarne zapremine fluida (slika 3.5) i kada se elementarna zapremina ΔV smanjuje, onda je granična vrijednost $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ kada ΔV teži nuli jednaka gustini fluida ρ elementarne neprekidne sredine u tački M.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (3.2)$$



Slika 3.5. Skica za definisanje gustine fluida

Gustina vode zavisi od pritiska i od temperature, odnosno mijenja se sa promjenom temperature tako što sa porastom temperature gustina vode opada. Međutim, u hidromehanici uglavnom rješavamo zadatke i konkretne probleme računajući gustinu vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, što predstavlja približnu gustinu vode na temperaturi od +4°C i pri atmosferskom pritisku od $1 \text{ atm} = 101325 \text{ N/m}^2$ (Pa). Naime, smatra se da je voda nestišljiva izuzev kod razmatranja hidrauličkog udara (nestacionarno tečenje u cijevima). Takođe, i vazduh je nestišljiv sve dok mu brzina kretanja nije veća od $\frac{1}{4}$ brzine kretanja zvuka u vazduhu.

Ako u jednom rezervoaru ili posudi imamo dvije homogene tečnosti različitih gustina, onda u zadacima koje rješavamo u hidromehanici se polazi od pretpostavke da nema miješanja tih tečnosti te da se formira jasna granica

između tečnosti. Tečnost koja ima manju gustinu ρ uvijek će zauzimati gornji dio rezervoara ili posude i uslovno rečeno „pliva“ na tečnosti veće gustine. Recipročnu vrijednost gustine fluida nazivamo *specifičnom zapreminom* (ϖ). Specifična zapremina ima poseban značaj u termodinamici.

$$\varpi = \frac{1}{\rho} \quad (3.3)$$

U tabeli 1. prikazan je odnos gustine vode u funkciji porasta njene temperature.

Tabela 1. Gustine vode u ovisnosti od temperature

Temperatura (°C)	0	4	10	15	20	60	100
Gustina ρ (kg/m ³)	999,87	999,99	999,70	999,13	998,23	983,24	958,40

Mjerenje gustine fluida može se vršiti pomoću U cijevi, piknometrima (mjerenje mase u poznatoj zapremini), Vestfalovom vagom itd.

3.3.2. Težina i specifična težina

Uopšteno gledajući, težina predstavlja silu koja je jednaka proizvodu mase krutog tijela (m) i ubrzanja sile Zemljine teže (g).

$$G = m \cdot g \quad (3.4)$$

Veličina ubrzanja sile Zemljine teže (g) zavisi od geografskog položaja, a u hidromehanici je uobičajno da se usvaja $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Drugim riječima, ako posmatramo elementarni dijelčić čija je zapremina dV , onda njegova težina iznosi:

$$dG = dm \cdot g \quad (3.5)$$

Kod fluida (tečnosti i gasovi) umjesto elementarne mase (dm) pišemo proizvod gustine fluida i elementarne zapremine (ρdV). Težina elementarnog dijelčića fluida iznosi:

$$dG = \rho \cdot g \cdot dV \quad (3.6)$$

Specifična težina (γ) predstavlja težinu jedinične zapremine i zavisi od odnosa težine i zapremine odnosno gustine materijala (ρ) i ubrzanja sile Zemljine teže (g).

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{m \cdot g}{V} \quad \text{gdje je} \quad \rho = \frac{m}{V} \quad (3.7)$$

$$\gamma = \rho \cdot g \quad \left(\frac{N}{m^3} \right) \quad (3.8)$$

Specifična težina (γ) povezana je sa gustinom (izraz 3.8) i može se reći da su povezanosti specifične težine i gustine slične kao povezanost mase i težine. Iz izraza 3.1 i 3.7 vidi se da gustine tijela, pa tako i fluida, ne zavisi od gravitacije, a specifična težina zavisi od gravitacije odnosno sile ubrzanja Zemljine teže. Ako posmatramo vodu, onda je njena gustina ista i na Zemlji i na Mjesecu ($\approx 1000 \text{ kg/m}^3$). Međutim, specifična težina vode na Zemlji (za $g=9,81 \text{ m/s}^2$) iznosi $g=9,81 \text{ kN/m}^3$, dok na Mjesecu je specifična težina vode znatno manja zbog slabije gravitacije (manji intenzitet specifične težine za oko šest puta).

3.3.3. Viskoznost

Pojam riječi viskoznost dolazi od latinske riječi „viscum“ što znači imela. Viskozno ljepilo, na primjer, koje se koristi u raznim privrednim granama, proizvodi se od bobica biljke imela.

Viskoznost predstavlja veličinu koja opisuje otpor neke tečnosti prema tečenju. Takođe, viskoznost ili kako se još naziva unutarnje trenje je osobina tečnosti i gasova odnosno fluida da pružaju otpor međusobnom kretanju njihovih slojeva. Posmatramo li talase u moru, znamo da su oni najveći na površini vode i da sa dubinom oni gotovo nestaju odnosno nema ih na dnu. To se dešava zbog dejstva vjetrova koji pomiče površinu vode i ta brzina pomicanja postepeno opada sa dubinom vode.

Postoji određena međumolekularna razmjena između susjednih slojeva u tečnostima, ali su molekule mnogo bliže u odnosu na gasove, te kohezione sile drže molekule čvrsto u mjestu, što znači da kohezija ima važnu ulogu kod viskoznosti tečnosti. Povećanjem temperature fluida, odnosno tečnosti u prvom redu, smanjuju se sile kohezije, a povećava se međumolekularna razmjena. Tim smanjenjem sila kohezije smanjuje se napon smicanja dok se povećanjem međumolekularne razmjene povećavaju smičući naponi. Iz razloga ovog složenog međudodnosa uticaj temperature na viskoznost može se napisati u slijedećem obliku:

$$\mu_T = \mu_0(1 + AT + BT) \quad (3.9)$$

gdje je;

μ_T – viskoznost na temperaturi T ($^{\circ}\text{C}$)

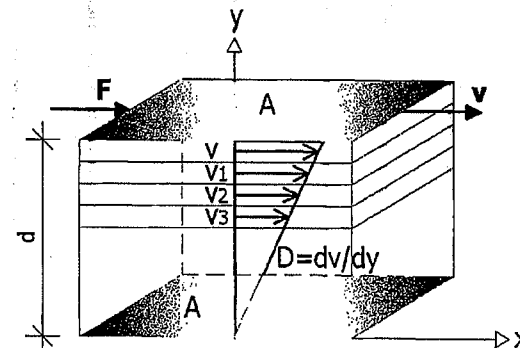
μ_0 – viskoznost na temperaturi 0 ($^{\circ}\text{C}$)

A, B – konstante za određene vrste tečnosti.

Takođe, dejstvo visokog pritiska može da utiče na promjenu viskoziteta tečnosti. Kako se pritisak povećava, relativna kretanja molekula zahtijevaju više energije, te viskozitet raste odnosno povećava se.

Materije koje imaju veću viskoznost djeluju ljepljivo, pa tako ulje ima veću viskoznost od vode, ali ulje ima manju gustinu od vode te pliva na njoj. Zanimljivo je da zagrijavanjem ulja znatno se smanjuje njegova viskoznost, dok se kod vode viskoznost manje smanjuje prilikom zagrijavanja.

Razumijevanje viskoznosti fluida najbolje se može shvatiti ukoliko zamislimo dvije ploče površine A između kojih se nalazi fluid čija debljina iznosi d koji se zbog dejstva adhezivnih sila i trenja gotovo „zaljepi“ za površinu ploča (slika 3.6). Fluid između ovih ploča može se podijeliti u više slojeva.



Slika 3.6. Viskoznost tečnosti između dvije ploče

Ukoliko gornju ploču pomjeramo brzinom v u smjeru x ose, onda će se sloj fluida koji je najbliže gornjoj ploči takođe pomjerati brzinom v u smjeru x ose. Naredni slojevi fluida prema donjoj nepokretnoj ploči pomjerat će se brzinama $v_1, v_2, v_3 \dots$, koje se smanjuju sa udaljenosti fluida računajući od gornje pokretne ploče. Donji slojevi fluida se pomjeraju proporcionalno sa rastojanjem od gornje pokretne ploče. Smanjenje brzine uzrokuje trenje u fluidu.

Na osnovu naprijed navedenog, može se zaključiti da je sila F kojom se pomjera gornja ploča proporcionalna sa njenom površinom A što znači da za veću površinu gornje ploče treba i veća sila za njeno pomjeranje iz razloga postojanja veće količine fluida koji se pokreće zajedno sa pločom i u skladu sa njenim pomjeranjem. Takođe, sila F je proporcionalna sa brzinom v i obrnuto proporcionalna sa rastojanjem d između gornje pokretne i donje nepokretne ploče odnosno veće rastojanje između ploča znači da imamo više slojeva fluida te da nam je potreban veći intenzitet sile za pomjeranje svih slojeva fluida. Ovo se može napisati u slijedećem obliku:

$$F \approx A, \quad F \approx v, \quad F \approx \frac{1}{d} \quad (3.10)$$

odnosno,

$$F \approx \frac{A \cdot v}{d} \quad (3.11)$$

ili,

$$F = \mu \frac{A \cdot v}{d} \quad (3.12)$$

gdje je;

 μ – dinamički koeficijent viskoziteta, F – intenzitet sile kojom pomjeramo gornju pokretnu ploču, d – rastojanje između gornje pokretne i donje nepokretne ploče, A – površina gornje pokretne ploče, v – brzina pomjeranja gornje pokretne ploče.

Iz razloga linearne raspodjele brzina u profilu, gradijent brzine je u svim tačkama posmatranog presjeka konstantan, te u bilo kojoj ravni koja je paralelna ravni xz dolazi do javljanja istog smičućeg naprezanja, odnosno:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (3.13)$$

gdje je;

 τ – smičući napon, μ – dinamički koeficijent viskoznosti ili unutarnjeg trenja, dv/dy – gradijent brzine koji pokazuje koliko se gornji sloj fluida pomjera u odnosu na donji sloj.

Naime, smičuća naprezanja postavio je Newton još u 17-om vijeku tako da, na primjer, voda i ulje kao i vazduh te druge tečnosti i gasovi se nazivaju i Newton-ovim fluidima (fluidi sa konstantnom viskoznošću) dok fluidi sa promjenjivom viskoznošću su ne-Newton-ovi fluidi. Vidimo da postoje tzv. koeficijenti viskoznosti u zavisnosti od vrste fluida i vrste primjenjenog napona, te postoji:

- *dinamička ili apsolutna viskoznost* koja određuje dinamiku nestišljivih fluida,
- *kinematička viskoznost* koju dobijemo kada dinamičku viskoznost podijelimo sa gustinom fluida,

Dinamički koeficijent viskoznosti ili unutarnjeg trenja (μ) uključuje dinamičke dimenzijske veličine. Odnos između dinamičkog koeficijenta viskoznosti ili unutarnjeg trenja (μ) i gustine fluida (ρ) predstavlja *kinematički koeficijent viskoznosti ili unutarnjeg trenja* koji u hidromehanici označavamo grčkim slovom ν , pa imamo:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.14)$$

U kinematički koeficijent viskoznosti „ulaze“ samo kinematičke veličine, te se njegove vrijednosti mijenjaju i zavise od promjene temperature tečnosti.

Kinematička viskoznost je jedan način boljeg poznavanja viskoznost fluida. Naime, kinematička viskoznost na osnovu ranije navedenih osobina, obuhvata zajedno i viskoznost i gustinu fluida. U hidromehanici postoji pojam tzv. idealne tečnosti kod koje se ne javljaju smičući naponi, za razliku od tzv. realne tečnosti koja je stvarna i kod koje postoje smičući naponi. Pojam i objašnjenja idealne i realne tečnosti će biti detaljno obrađeni u narednim poglavljima ovog udžbenika.

Tabela 2. Viskoznost vode u ovisnosti od temperature

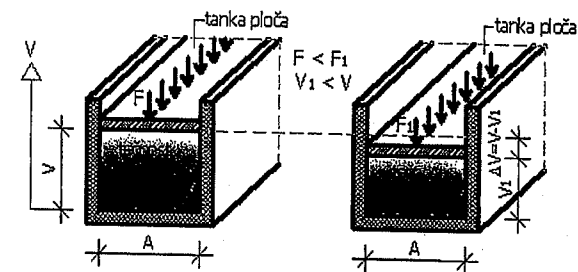
Temperatura (°C)	10	20	30	50	80	100
Viskoznost (Pa*s)	1,308 x 10 ⁻³	1,003 x 10 ⁻³	7,978 x 10 ⁻⁴	5,471 x 10 ⁻⁴	3,550 x 10 ⁻⁴	2,822 x 10 ⁻⁴

Za mjerenje viskoznosti postoje uređaji koji se nazivaju viskozimetri (kapilarni viskozimetar i obrtni viskozimetar). Na primjer, kod kapilarnog viskozimetra princip mjerenja baziran je na protjecanju tečnosti kroz tanke cijevi tzv. kapilare tako da se određena fiksna zapremina tečnosti nalazi pod stalnim pritiskom, dok su kapilare tačno određene dužine i poluprečnika. Ovim uređajem mjerimo potrebno vrijeme, tako da se kinematička viskoznost može izračunati množenjem vremena u sekundama sa konstantom kapilara.

3.3.4. Stišljivost fluida

U prirodi su sve materije više-manje stišljive pod dejstvom određenog pritiska koji djeluje na njih, što dovodi do promjene zapremine. Tečnosti su u neznatnoj mjeri stišljive te ih u praksi smatramo nestišljivima. Stišljivost tečnosti smanjuje se povećanjem temperature i pritiska. Nasuprot tečnostima, stišljivost gasova, je znatno izraženija.

Stišljivost ili kompresibilnost predstavlja osobinu tečnosti da usljed djelovanja normalne površinske sile F promijeni svoju zapreminu (V), a nakon prestanka djelovanja normalne površinske sile F zapremina tečnosti zauzima vrijednost koja je bila prije početka dejstva te sile.



Slika 3.7. Stišljivost tečnosti pod dejstvom normalne sile

Ukoliko na tečnost u posudi, na cijeloj površini, djeluje relativno mala sila F preko tanke ploče, onda će doći do pomjeranja elemenata tečnosti odnosno do njihovog zbijanja i do određenog smanjenja zapremine tečnosti u posudi (zapremina V) – slika 3.7. Kada povećamo intenzitet dejstva sile F na veličinu sile F_1 ($F < F_1$) onda dolazi do većeg smanjenja zapremine tečnosti u posudi (zapremina V_1), odnosno zapremina $V_1 < V$ odnosno $V - V_1 = \Delta V$ (promjena zapremine shodno povećanju intenziteta normalne sile na tečnost). Prestankom djelovanja normalne sile F odnosno sile F_1 dolazi do vraćanja prvobitne zapremine tečnosti u posudi koja je postojala prije uticaja normalne sile.

Pri proračunima smatramo da su tečnosti praktično nestišljive. Nasuprot tečnostima, gasovi su stišljivi i gustina im zavisi od veličine pritiska. Upravo zbog ovih osobina u hidromehanici razlikujemo stišljive i nestišljive fluide. Kod stišljivih fluida su elastične sile dominantne i zbog toga dolazi do promjene zapremine (slika 3.7), te se ovakvi modeli uglavnom primjenjuju u dinamici gasova. Kod nestišljivog fluida zapremina ostaje nepromijenjena.

Stišljivost fluida definišemo preko tzv. koeficijenta stišljivosti K_s koji predstavlja vrijednost odnosa relativne promjene zapremine tečnost ($\Delta V/V$) i promjene pritiska Δp koji tu promjenu i uzrokuje, kada posmatrana promjena zapremine teži nuli, odnosno:

$$K_s = - \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V/V}{\Delta p} = - \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p} = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (3.15)$$

U izrazu 3.15, predznak minus znači da povećanju pritiska odgovara smanjenje zapremine i da smanjenju pritiska odgovara povećanje zapremine.

Promjena zapremine prouzrokuje promjenu gustine, a iz uslova da je masa konstantna odnosno $m = \rho \cdot V = const$, dobijamo slijedeći izraz:

$$dm = \rho \cdot dV + V \cdot d\rho = 0 \quad (3.16)$$

$$\rho \cdot dV = -V \cdot d\rho$$

$$-\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.17)$$

Na kraju, uvrštavanjem izraza 3.17 u izraz 3.15 dobije se izraz za koeficijent stišljivosti K_s , koji glasi:

$$K_s = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} \quad (3.18)$$

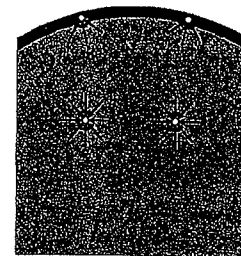
Recipročna vrijednost koeficijenta stišljivosti K_s naziva se prostorni ili zapreminski modul elastičnosti i obilježava se velikim slovom E , odnosno:

$$E = \frac{1}{K_s} = -V \frac{dp}{dV} \quad (3.19)$$

3.3.5. Površinski napon

Površinski napon tečnosti predstavlja tzv. „privlačnu“ osobinu koja omogućava da površina dijela tečnosti bude privučena do druge površine. Površinski napon je sila po jedinici dužine odnosno može se reći da je površinski napon energija po jedinici površine i tada uglavnom koristimo termin površinska energija koji se osim na tečnosti primjenjuje i na čvrsta tijela. Površinski napon u hidromehanici obilježava se grčkim slovom σ .

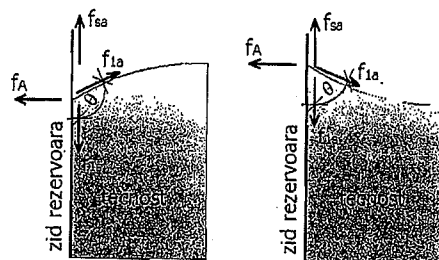
Posmatrajući masu neke tečnosti može se uočiti da je svaki molekul privučen od strane susjednih molekula te tečnosti, jednako u svim pravcima. Na slobodnoj površini tečnosti molekuli su privučeni naniže i to od molekula koji se nalaze na većoj dubini u tečnosti, dok molekuli medija koji se nalazi iznad slobodne površine tečnosti (vazduh ili pak tečnost) ne privlače tim intenzitetom. Znači da su svi molekuli na površini tečnosti pod dejstvom privlačne molekularne sile koja se dovodi u ravnotežu preko otpora te tečnosti na pritisak. Ipak, postoji određena sila koja smanjuje tu površinu, pa površina tečnosti dobija tzv. elastičnu rastegnutu membranu, odnosno postojanje površinskog napona je usljed razlika u intenzitetu međumolekularnih sila između molekula unutar tečnosti, a to su kohezione sile, i između molekula tečnosti u površinskom sloju i molekula drugog spoljnjeg medija.



Slika 3.8. Dijagram sila dva molekula tečnosti

Ako posmatramo površinu odnosno granicu između jedne tečnosti (na primjer vode) i nekog drugog medija (vazduh ili druga tečnost) onda površinski napon nije samo osobina vode nego je i osobina granice vode sa drugim medijem, odnosno drugom sredinom. Ukoliko imamo tečnost u rezervoaru tada osim granice između tečnosti i vazduha u rezervoaru postoji i granica između tečnosti i zidova rezervoara. Međumolekularne sile između molekula tečnosti i molekula

u zidu rezervoara predstavljaju sile adhezije. Tečnost u rezervoaru će se "penjati" uz zid rezervoara u zavisnosti od odnosa kohezionih i adhezionih sila kao i od vrste spoljnog medija koji se nalazi iznad površine tečnosti. Površinski napon nastao na granici tečnosti sa zidovima rezervoara je uglavnom manji od površinskog napona na granici tečnosti sa vazduhom u rezervoaru, dok na mjestu preklapanja dvije granice ili površine dolazi do ravnoteže svih sila. Na mjestu gdje se dvije površine dodiruju (na primjer tečnost i zid rezervoara) dolazi do formiranja dodirnog ugla θ , koji predstavlja ugao kojeg tangenta na površinu zaklapa sa čvrstom površinom (slika 3.9.).



Slika 3.9. Sila u tačkama dodira za ugao θ veći od 90° i ugao θ manji od 90°

Na slici 3.9. prikazane su sile na granici između tečnosti i medija iznad tečnosti (vazduh), zatim na granici tečnosti i zida rezervoara i na granici zida rezervoara i vazduha. Površinski napon između tečnosti i zida rezervoara označimo sa σ_{ls} , površinski napon između zida rezervoara i vazduha označimo sa σ_{sa} , dok površinski napon između tečnosti i vazduha označimo sa σ_{la} . Na lijevoj strani slike 3.9. vidljivo je da razlika između površinskog napona tečnosti i zida rezervoara sa površinskim naponom između zida rezervoara i vazduha ($\sigma_{ls} - \sigma_{sa}$) manja od površinskog napona između tečnosti i vazduha (σ_{la}), ali je i pozitivna, odnosno:

$$\sigma_{la} > \sigma_{ls} - \sigma_{sa} > 0 \quad (3.20)$$

Horizontalne i vertikalne sile u istoj tački se moraju poništiti, te se horizontalna komponenta od sile f_{la} poništava sa silom adhezije f_A , odnosno:

$$f_A = f_{la} \sin \theta \quad (3.21)$$

Vertikalna komponenta sile f_{la} poništava se sa silom f_{ls} , te imamo:

$$f_{ls} - f_{sa} = -f_{la} \cos \theta \quad (3.22)$$

Sile su direktno proporcionalne svojim površinskim naponima, onda je:

$$\sigma_{ls} - \sigma_{sa} = -\sigma_{la} \cos \theta \quad (3.23)$$

Površinski napon vode čija je slobodna površina u dodiru sa vazduhom zavisi od temperature i površinski napon se smanjuje porastom temperature (tabela 3).

Tabela 3. Površinski napon vode koja je u dodiru sa vazduhom

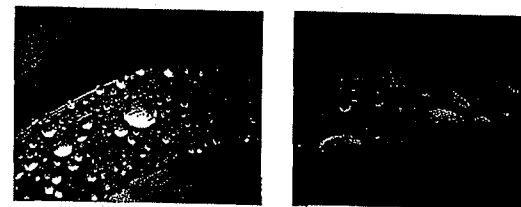
Temperatura vode ($^\circ\text{C}$)	0	4	10	20	50	70	90	100
Površinski napon σ (N/m)	0,0756	0,0753	0,0742	0,0727	0,0679	0,0643	0,0610	0,0593

Površinski naponi nekih fluida pri temperaturi 20°C koje su u dodiru sa vazduhom odnosno veličine njihovog površinskog napona pri atmosferskom pritisku dati su u tabeli 4.

Tabela 4. Površinski napon pojedinih fluida temperature 20°C koji su u dodiru sa vazduhom

Fluid	Kerozin	Benzen	Etil alkohol	Živa	Morska voda
Površinski napon σ (N/m)	0,0250	0,0290	0,0230	0,5100	0,073

Zbog postojanja površinskog napona imamo povećanje pritiska unutar kapi tečnosti, tako da kap tečnosti zauzima sferni oblik zbog postojanja zatežućih stalnih sila u površinskom sloju tečnosti. Zbog toga, kap tečnosti osim što poprima sferni oblik ima i najmanju vanjsku površinu.



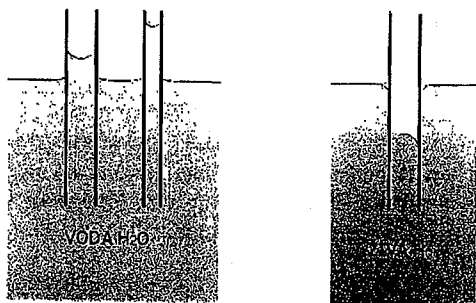
Slika 3.10. Sferni oblik kapi vode na listovima biljaka

U hidrotehničkoj inženjerskoj praksi veličina površinskog napona se obično zanemaruje. Međutim, pojava izdizanja i spuštavanja tečnosti u kapilarama (uskim cijevima) rezultat je površinskog napona, te ova pojava zauzima važno mjesto u građevinarstvu. Ovo je naročito izraženo kada je riječ o kapilarnom dizanju vode čak i iznad nivoa površine tečnosti kao kod podrumskih zidova ili temeljnih konstrukcija objekata.

3.3.6. Kapilarnost

Kapilarnost predstavlja osobinu tečnosti da se „podiže“ i „spušta“ u uskim i tankim procjepima bez dejstva sile gravitacije ili u suprotnom smjeru od sile gravitacije, odnosno kapilarnost je posljedica površinskog napona. Od osobina tečnosti i od osobina čvrste površine zavisi koji će se od navedena dva slučaja pojaviti.

Naime, kapilarnost se može objasniti na način da zbog različitih adhezijskih sila koje se javljaju između tečnosti i zida odnosno površine posude (cijev prečnika < 1 mm), dolazi do toga da površina tečnosti neće biti potpuno horizontalna nego se uz zidove ili rubove uske cijevi površina tečnosti zakrivljuje. Ovom zakrivljenošću stvara se tzv. dodirni ugao između tečnosti i zida uske cijevi, odnosno površine cijevi koji zavisi od materijala cijevi odnosno ukoliko je cijev uskog presjeka da su njeni zidovi bliže jedan drugom onda je zakrivljenost površine tečnosti ne samo uz rubove posude nego zahvata čitavu površinu u takvoj uskoj cijevi ili posudi. Tečnost u takvoj cijevi diže se prema gore dok god se težina izdignutog stupca tečnosti ne izjednači silom kojom ga kapilarnost podiže. Za neke uslove i kombinacije materijala cijevi i tečnosti doći će do spuštanja tečnosti ispod nivoa koji bi normalno zauzimala u cijevi.



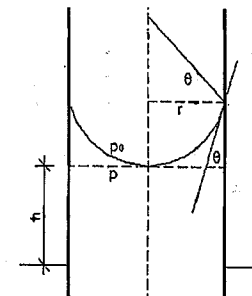
Slika 3.11. Kapilarnost vode i žive u uskim staklenim cijevima

Znači, kapilarnost se javlja pri kontaktu tečnosti i čvrstih tijela i direktna je posljedica površinskog napona. Kapilarnost zavisi i od sile kohezije i od sile adhezije. Sile adhezije djeluju između molekula čvrstog tijela i molekula tečnosti, a sile kohezije djeluju između molekula same tečnosti koja se nalazi u uskoj cijevi. Intenziteti ovih sila su međusobno različiti i oni su funkcija prirode molekula čvrstog tijela kojeg tečnost dodiruje ili kvasi.

Kada su sile kohezije manje od sile adhezije onda se tečnost diže uz zid cijevi i dodirni ugao je oštar, a u slučaju da su kohezione sile mnogo manje od sile adhezije, tečnost će se dizati visoko uz zid uske cijevi i tada je dodirni ugao (ugao kvašenja) veoma mali. Kada je kohezija veća od adhezije dodirni ugao je tup i doći će do snižavanja ili bolje rečeno „spuštanja“ nivoa tečnosti u uskoj

cijevi (kapilarna depresija). Voda će kvasiti posudu od stakla dok, na primjer, živa ne kvasi staklo.

Kada se tečnost diže uz zidove uske cijevi, površina tečnosti u cijevi teži najmanjoj vrijednosti odnosno teži da zauzme površinu kružnog poprečnog presjeka. Ovakvom dizanju tečnosti uz zidove uske cijevi suprotstavlja se težina stuba tečnosti iznad nivoa tečnosti u cijevi i ona djeluju naniže (u suprotnom smjeru od dizanja tečnosti) te će se u jednom trenutku i položaju uspostaviti ravnoteža sila. Sila površinskog napona djeluje u pravcu površine tečnosti te zaklapa ugao θ sa površinom stijenke zida cijevi.



Slika 3.12. Kapilarnost vode i visina penjanja vode u uskoj cijevi

Inače, sila površinskog napona se može razložiti na vertikalnu i normalnu komponentu. Dizanje tečnosti je zbog međusobnog kompenzovanja horizontalnih komponenti sila te ostaje djelovanje samo vertikalnih komponenti sila. Težina stuba tečnosti raste, a vertikalne komponente ostaju iste prilikom penjanja tečnosti pa se u određenom položaju uspostavlja ravnoteža sila i tada je težina stuba jednaka vertikalnim komponentama. Sila površinskog napona djeluje po unutarnjem obimu cijevi i njen intenzitet iznosi:

$$F = 2r\pi\sigma \quad (3.24)$$

gdje je;

σ – površinski napon (N/m)

r – unutarnji prečnik cijevi (m).

Težina stuba tečnosti na osnovu koje se i uspostavlja ravnoteža sila iznosi:

$$G = \rho g V = \rho g r^2 \pi h \quad (\text{N}) \quad (3.25)$$

odnosno za stanje u kome će tečnost biti u ravnoteži:

$$2r\pi\sigma \cos \theta = \rho g r^2 \pi h \quad (3.26)$$

Iz izraza 3.26 može se odrediti visina tečnosti u kapilari iznad slobodne površine tečnosti, koja glasi:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r} \quad (\text{m}) \quad (3.27)$$

Kod smanjenja nivoa tečnosti u uskoj cijevi (kapilari), znači kod pojave tzv. kapilarne depresije, imamo iste uslove i okolnosti, ali samo u suprotnom smjeru. Kapilarnost je vidljiva i u svakodnevnom životu kao, na primjer, apsorpcija vode pomoću papira ili vate, dok sitne pore spužve se ponašaju kao sitni kapilari (uske cijevi) zbog čega spužva upija određene količine vode.

4. HIDROSTATIKA

Hidrostatika je jedna od oblasti u mehanici fluida i izučava mirovanje fluida odnosno proučava uslove pod kojim su fluidi (tečnosti i gasovi) u stanju stabilne ravnoteže. Kod proučavanja mirovanja razmatramo fluide nepromjenjive gustine pod uticajem sile Zemljine težine. Kod mirovanja tečnosti nema pojave tangencijalnih napona.

Poznato je da tečnosti uvijek zauzimaju oblik posude u kojoj se nalaze. Uticaj i dejstvo tečnosti u stanju mirovanja na zid posude uvijek je normalno na njegovu površinu i slobodna površina tečnosti je uvijek normalna na rezultujuću masenu silu koja djeluje na nju.

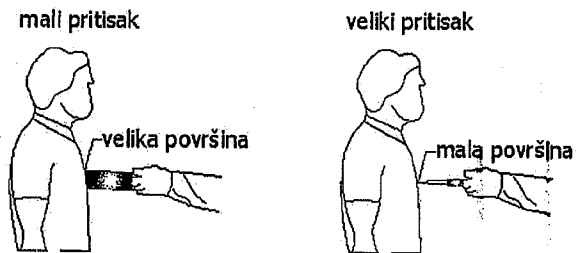
Hidrostatika je od posebnog značaja za građevinske inženjere, jer prilikom dimenzionisanja nekih elemenata konstrukcije treba pored svih uticaja koji djeluju na takav konstruktivni elemenat, znati odrediti i hidrostatičku silu (slučaj podrumskih i suterenskih zidova koji su izloženi dejstvu podzemnih voda, potisak na temeljnu konstrukciju građevinskog objekta, i naravno kod svih hidrotehničkih objekata i konstrukcija). Potrebno je znati odrediti raspored hidrostatičkog pritiska na objekat ili dio objekta te znati odrediti horizontalne i vertikalne intenzitete komponentnih sila hidrostatičkog pritiska. Tako, može se slobodno reći da stanje tečnosti u mirovanju predstavlja i najjednostavniju situaciju koju studenti građevinskih fakulteta i projektanti trebaju znati riješiti.

Osim prethodno navedenog veoma bitnog uticaja vode u stanju mirovanja na građevinske objekte, projektanti i građevinski inženjeri trebaju poznavati i mjerenje atmosferskog, apsolutnog i hidrostatičkog pritiska. Naravno, prethodno je potrebno poznavati osnovnu jednačinu hidrostatike na osnovu koje i određujemo pritisak nekog fluida u bilo kojoj njegovoj tački.

Osim hidrostatičkog pritiska na građevinske objekte, sile hidrostatičkog potiska ili uzgona na, na primjer, temelje građevinskih objekata ili dijelova hidrotehničkih konstrukcija, treba poznavati i osnovne jednačine za analizu stabilnosti tijela koje pliva na površini tečnosti.

4.1. Pojam pritiska

Ukoliko posmatramo čvrsta tijela i tečnosti može se reći da su njihove gustine poredivne, jer je prostor između atoma relativno mali, dok je gustina gasova znatno manja iz razloga velikog prostora između čestica gasova. Pritisak je fizička veličina i nalazi se u određenoj vezi sa silom koja ga izaziva. Takav pritisak nije identičan sili koja ga izaziva, jer jedna ista sila (po intenzitetu, pravcu i smjeru) može izazvati različita dejstva. Primjer za ovu tvrdnju može se slikovito objasniti na slijedeći način: ukoliko laganim komadom drveta lupkamo po tijelu čovjeka, silom određenog intenziteta, nećemo izazvati nikakva posebna dejstva niti posljedice. Međutim, ukoliko istim intenzitetom sile koristimo iglu onda će doći do određenih posljedica u obliku probadanja tijela (slika 4.1).



Slika 4.1. Sila istog intenziteta koja djeluje na različite površine

Vidimo iz slike 4.1 da je razlika u veličini površina odnosno površina na koju djelujemo laganim komadom drveta veća je od površine na koju djelujemo iglom. Fizička veličina koja pokazuje i opisuje razliku u određenim dejstvima zove se pritisak i u mehanici se obilježava slovom p , a dat je izrazom:

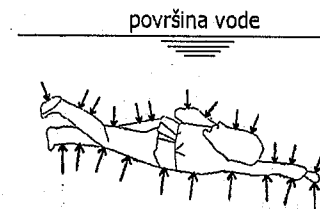
$$p = \frac{F}{S} \quad \left(\frac{N}{m^2} = Pa \right) \quad (4.1)$$

gdje je;

F – sila koja djeluje okomito na površinu (N),
 S – površina na koju djelujemo silom (m^2).

Na ovako jednostavan način definisan je pritisak za sva agregatna stanja i naročito je značajan za fluide (pogotovo za tečnosti) koje izučavamo u hidromehanici.

Ako, na primjer, u jednoj zatvorenoj posudi imamo gas, tada gas djeluje silom na unutarnje zidove te posude okomito odnosno pod pravim uglom u odnosu na zidove posude. Ovo je direktna posljedica činjenice da takva sila nastaje od fluida koji se nalaze u stanju mirovanja. Poznato je da fluidi nemaju osobinu ni mogućnost da imaju otpor silama koje izazivaju deformaciju smicanja. Sile koje izazivaju pritisak u fluidima kao i intenzitet sile pritiska u fluidima uvijek ima određen pravac djelovanja i to pod pravim uglom u odnosu na bilo kakve površine na koje djeluje ta sila. Općenito uzevši, poznato je da pritisak djeluje na sve površine pa tako djeluje i hidrostatički pritisak na čovjeka koji roni u vodi i to sa svih strana (slika 4.2.). Sile hidrostatičkog pritiska koje djeluju iznad ronioca odnosno koje su bliže vodnoj površini su manjeg intenziteta od onih koje djeluju ispod plivača, te je ovo uzrok pojave koja se naziva potisak.



Slika 4.2. Hidrostatički pritisak različitih intenziteta na ronioca

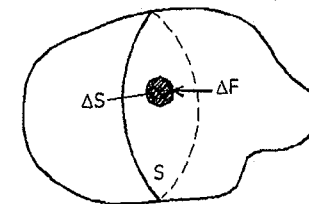
Takođe, prilikom hodanja po snijegu dolazi do većeg ili manjeg propadanja u snijeg što zavisi od oblika i vrste obuće koju imamo, pa tako ako imamo skije onda ćemo manje propadati u snijeg, a naša masa tijela niti težina odnosno sila se nisu promijenile. Promijenila se samo površina preko koje se naše tijelo oslanja na snijeg (izraz 4.1).

Prethodni primjeri dosta slikovito objašnjavaju pojam pritiska na tijela, a naročito pojam hidrostatičkog pritiska na tijela koja su pod dejstvom tečnosti u stanju mirovanja.

4.2. Hidrostatički pritisak

Posmatrajmo poznatu masu fluida koji se nalazi u ravnotežnom stanju. Ako promatranu masu fluida presiječemo jednom vertikalnom ravni S dobijamo dva dijela mase fluida (slika 4.3). Kada odvojimo desni dio promatrane prethodno presiječene mase fluida ostaje lijevi dio fluida koji će biti u ravnoteži samo ukoliko uticaj odvojenog desnog dijela fluida zamijenimo površinskom silom

$\Delta \vec{F}$ koja djeluje na elemente ΔS površine presjeka. U ovom slučaju sila $\Delta \vec{F}$ predstavlja silu na element površine ΔS .



Slika 4.3. Određivanje hidrostatičkog pritiska na masu fluida u ravnoteži

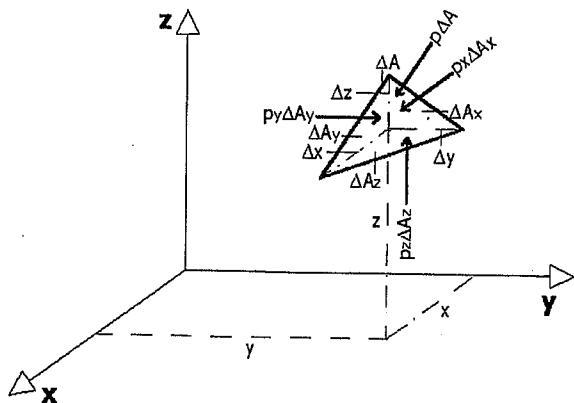
Odnos $\Delta F/\Delta S$ je srednja vrijednost pritiska na tu površinu. Ako smanjujemo elementarnu površinu ΔS tada će granična vrijednost srednjeg pritiska $\Delta F/\Delta S$ kada ΔS teži nuli, biti pritisak u jednoj promatranoj tački unutar elementarne površine ΔS , odnosno:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (4.2)$$

Pritisak je skalarna veličina, pri čemu pritisak koji nastaje kod ravnoteže masa fluida zovemo hidrostatičkim pritiskom. Hidrostatički pritisak ima dvije osnovne osobine, i to:

1. sila pritiska uvijek je upravna (normalna) na površinu na koju djeluje
2. intenzitet sile hidrostatičkog pritiska u jednoj promatranoj tački na nekoj dubini tečnosti je isti u svim smjerovima.

Navedene tvrdnje mogu se dokazati ako posmatramo jedan elementarni tetraedar (slika 4.4).



Slika 4.4. Elementarni tetraedar tečnosti u stanju mirovanja i ravnoteža sila

Sa p_x , p_y i p_z označeni su pritisci u x , y i z smjeru dok sa p je označen pritisak upravan na kosu stranu tetraedra. Pritisci p_x , p_y i p_z djeluju na površine koje koje ćemo u ovom slučaju označiti sa ΔA_x , ΔA_y i ΔA_z . Na promatrani elementarni tetraedar sila teže odnosno masena sila predstavlja zapreminsku silu koja je po svojoj vrijednosti proporcionalna zapremini elementarnog tetraedra.

Ako na promatranom tetraedru uglove između osa x , y , i z označimo sa α , β i γ normala na površinu ΔA , onda imamo slijedeće odnose:

$$\Delta A_x = \Delta A \cos \alpha ; \Delta A_y = \Delta A \cos \beta ; \Delta A_z = \Delta A \cos \gamma \quad (4.3)$$

Uslovi ravnoteže za površinske sile pritiska na promatranom elementarnom tetraedru u pravcu tri ose (x , y i z) su:

$$p_x \Delta A_x - p \Delta A \cos \alpha = 0 ; p_y \Delta A_y - p \Delta A \cos \beta = 0 ; p_z \Delta A_z - p \Delta A \cos \gamma = 0 \quad (4.4)$$

Ako međusobne odnose površina iz izraza 4.3 uvrstimo u uslove ravnoteže (izraz 4.4) dobit ćemo Pascalov zakon, odnosno:

$$p_x \Delta A_x - p \Delta A_x = 0 ; p_y \Delta A_y - p \Delta A_y = 0 ; p_z \Delta A_z - p \Delta A_z = 0 \quad (4.5)$$

$$p_x \Delta A_x = p \Delta A_x ; p_y \Delta A_y = p \Delta A_y ; p_z \Delta A_z = p \Delta A_z \quad (4.6)$$

Daljim rješavanjem prethodnih jednačina po silama pritiska u pravcima x , y i z ose, dobijamo slijedeće izraze:

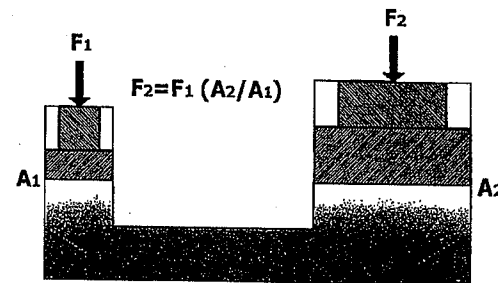
$$p_x = \frac{p \Delta A_x}{\Delta A_x} ; p_y = \frac{p \Delta A_y}{\Delta A_y} ; p_z = \frac{p \Delta A_z}{\Delta A_z} \quad (4.7)$$

Nakon skraćivanja jednačina iz izraza 4.7 po ΔA_x , ΔA_y i ΔA_z , Pacal-ov zakon dobija svoj slijedeći izraz:

$$p_x = p_y = p_z = p \quad (4.8)$$

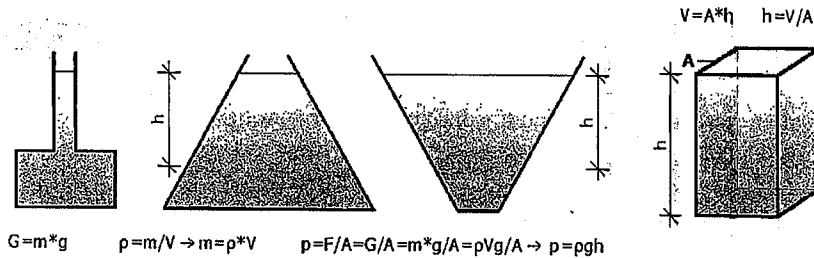
Izraz 4.8 odnosno Pascalov zakon dokazuje ranije navedenu tvrdnju da je pritisak u jednoj promatranoj tački skalarna veličina i da pritisak u toj tački ne zavisi od smjera. U različitim tačkama neke promatrane zapremine tečnosti pritisci mogu biti različiti što znači da pritisak zavisi od gustine tečnosti i položaja od površine te tečnosti.

Pascalov zakon predstavlja bazni zakon hidrostatičke i govori da u tečnosti koja se nalazi u zatvorenoj posudi, vanjski pritisak širi se jednako na sve strane, odnosno čestice tečnosti prenose pritisak jednako u svim pravcima. Ako posuda ispunjena nekom tečnosti ima dva otvora čije su površine različite (slika 4.5), i u kojima su smješteni pokretni klipovi, a površina drugog klipa je n puta veća od površine prvog klipa, tada ako na mali klip djelujemo određenom vanjskom silom, na veliki klip će djelovati sila n puta veća. Pascalov zakon se može primjeniti na utvrđivanje hidrostatičkog pritiska.



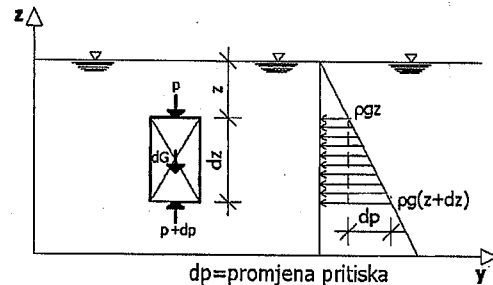
Slika 4.5. Pascalov zakon (princip rada hidrauličke prese)

Hidrostatički pritisak u fizičkom smislu jednak je težini stupca tekućine po m^2 površine. Sa slike 4.6 vidimo da hidrostatički pritisak zavisi od gustine tečnosti, ubrzanja sile teže i dubine mjerene od površine tečnosti, što je već i navedeno kroz prethodna razmatranja.



Slika 4.6. Određivanje hidrostatičkog pritiska

Ako razmatramo nestišljivi fluid možemo doći do zakona o promjeni hidrostatičkog pritiska sa dubinom na kojoj želimo odrediti veličinu hidrostatičkog pritiska (slika 4.7).



Slika 4.7. Promjena hidrostatičkog pritiska sa dubinom tečnosti

Na slici 4.7 vidi se da na površinu elementarnog djelića tečnosti dA djeluju pritisak p i pritisak $p+dp$ koji je se nalazi na dubini $z+dz$ od površine tečnosti odnosno na dubini dz od položaja djelovanja pritiska p . Sa dG označit ćemo težinu elementarnog djelića tečnosti, pa ravnoteža sila u pravcu z ose odnosno u vertikalnom pravcu iznosi:

$$dA \cdot p + dG = dA(p + dp) \quad (4.9)$$

$$dG = dA dz \rho g \quad (4.10)$$

$$dA \cdot p + dA dz \rho g = dA \cdot p + dA dp \quad | :dA \quad (4.11)$$

$$\frac{dA \cdot p}{dA} + \frac{dA dz \rho g}{dA} = \frac{dA \cdot p}{dA} + \frac{dA dp}{dA}$$

$$dp + \rho g dz = p + dp \quad (4.12)$$

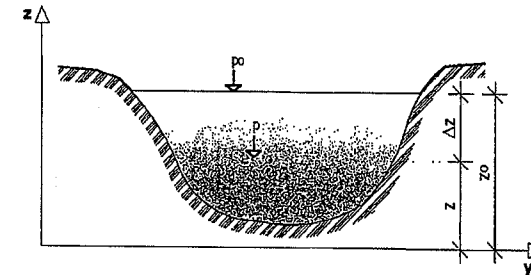
$$p = \rho g dz \quad (4.13)$$

Znači, veličina hidrostatičkog pritiska direktno zavisi od proizvoda gustine tečnosti, ubrzanja sile Zemljine teže ($g=9,81 \text{ m/s}^2$) i položaja promatrane tačke u kojoj želimo odrediti hidrostatički pritisak. Izraz 4.13 predstavlja veličinu hidrostatičkog pritiska u tečnosti na nekoj dubini z pri čemu je $p \geq 0$. Kada mjerimo pritiske na različitim dubinama (slika 4.8) odnosno na različiti dubine Δz , tada će se oni razlikovati za veličinu promjene pritiska Δp koja je u direktnoj zavisnosti od promjene dubine, te imamo:

$$\Delta p = p_2 - p_1 \quad (4.14)$$

Prema tome, poznati pritisak p_2 može se odrediti na osnovu poznatog pritiska p_1 , odnosno:

$$p_2 = p_1 + \rho g \cdot \Delta z \quad (4.15)$$



Slika 4.8. Određivanje hidrostatičkog pritiska na različitim dubinama

Sa slike 4.8 može se zaključiti da ukoliko je pritisak p_1 jednak atmosferskom pritisku koji djeluje na površini tečnosti odnosno $p_1=p_0$ tada se može odrediti hidrostatički pritisak u fluidu prema izrazu:

$$p = p_0 + \rho g \cdot \Delta z \quad (4.16)$$

Izraz 4.16 daje vrijednost pritiska koji vlada u tečnosti na dubini Δz mjereno od površine tečnosti dok na površinu tečnosti djeluje vrijednost atmosferskog pritiska p_0 . Znači da je vrijednost pritiska p iz izraza 4.16 tzv. **apsolutni pritisak na dubini Δz** .

U hidromehanici dubinu od površine tečnosti obilježavamo malom slovom h odnosno $\Delta z = h$, te izraz 4.16 dobija slijedeći izgled:

$$p = p_0 + \rho g \cdot h \quad (4.17)$$

Na osnovu prethodnog izraza može se odrediti razlika pritiska Δp na slijedeći način:

$$p - p_0 = \rho g \cdot h \quad (4.18)$$

$$p - p_0 = \Delta p = \rho g \cdot h \quad (4.19)$$

U hidrotehničkoj praksi kada na površini tečnosti vlada atmosferski pritisak, vrijednost Δp se označava sa p što nije u potpunosti ispravno, tako da se ta greška dešava kod predpritiska prema atmosferskom pritisku, pa hidrostatički pritisak u nekoj tečnosti može se dobiti iz izraza:

$$p = \rho g \cdot h \quad (4.20)$$

Na osnovu izraza 4.20 može se hidrostatički pritisak odrediti visinom stupca tečnosti prema izrazu:

$$h = \frac{p}{\rho g} \quad (4.21)$$

Ovaj izraz predstavlja visinu pritiska odnosno pijezometarsku visinu pa pošto pritisak izražavamo kao odnos sile prema površini ($N/m^2 = Pa$) onda visina pritiska se izražava visinom stupca tečnosti (m).

Kada u izraz 4.21 se doda i položajna odnosno geodetska kota promatrane tačke u kojoj želimo odrediti hidrostatički pritisak, dobit će se slijedeći izraz:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (4.22)$$

Prethodni izraz predstavlja *pijezometarsku kotu* Π koja je zbir visine pritiska ($p/\rho g$) u promatranoj tački i geodetske ili položajne kote (z), pa imamo:

$$\frac{p}{\rho g} + z = const. \quad (4.23)$$

Izraz 4.23 predstavlja *osnovnu jednačinu hidrostatičke*. Pijezometarska kota zavisi od položajne kote odnosno od izbora referentne ravnine, i pijezometarska kota se veže za jedan fluid odgovarajuće nepromjenjive gustine. Kada u jednoj posudi postoji više različitih tečnosti koje se ne miješaju, tada svaka od tečnosti

ima svoju pijezometarsku kotu, a hidrostatički pritisak u nekoj tački na spoju dvije tečnosti je isti i ne zavisi od toga da li promatrana tačka „pripada“ donjoj ili gornjoj tečnosti odnosno tečnosti veće ili manje gustine.

Kod otvorenih rezervoara ili sistema sa slobodnom površinom fluida, pijezometarska kota Π poklapa se sa kotom tačke na slobodnoj površini, dok kod rezervoara ili posuda pod pritiskom pijezometarska kota daje veličinu do koje kote bi se fluid popeo da je slobodan ili bolje rečeno, do koje kote bi se popeo fluid kada bi postavili pijezometar (cijev veoma malog prečnika) otvoren sa gornje strane.

Ukoliko određujemo hidrostatički pritisak na dubini 1,0m od površine vode ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$), onda hidrostatički pritisak na toj dubini iznosi:

$$p = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,0 = 9810 \text{ N/m}^2$$

Ovaj pritisak možemo odrediti i visinom vodenog stupca, odnosno:

$$h = \frac{9810}{1000 \cdot 9,81} = \frac{9810}{9810} = 1,0 \text{ m}$$

Poznato je da gustina žive iznosi $\rho_z = 13600 \text{ kg/m}^3$, pa možemo visinu prethodno dobijenog pritiska odrediti i preko visine stupca žive:

$$h = \frac{9810}{13600 \cdot 9,81} = \frac{9810}{133416} = 0,0735 \text{ mHg}$$

4.3. Mjerenje pritiska

U hidrotehničkoj praksi potrebno je poznavati i vrijednost apsolutnog pritiska koji predstavlja pritisak u odnosu na tzv. „apsolutnu nulu“ i koji je potreban kod izučavanja stišljivih fluida, a hidrostatički pritisak se izražava u odnosu na atmosferski pritisak.

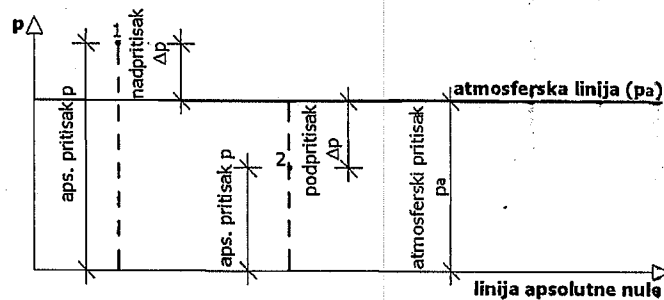
Mjerenje razlike između tzv. referentnog pritiska i pritiska u fluidu predstavlja, u stvari, pojam mjerenja pritiska.

Atmosferski pritisak zovemo i barometarskim pritiskom i možemo ga izraziti visinom stupca žive sa očitavanja na živinom barometru ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$). Može se reći da barometarski pritisak predstavlja pritisak koji vrši atmosfera svojom težinom iznad neke promatrane tačke. U proračunima treba voditi računa o tome da li se pritisak iskazuje kao apsolutni u odnosu na pritisak okoline (barometarski odnosno atmosferski pritisak). Kada je promatrani pritisak veći od atmosferskog ili barometarskog tada njihovu razliku nazivamo *nadpritisak*, a ukoliko je promatrani pritisak manji od atmosferskog onda njihovu razliku nazivamo *podpritisak* ili *vakuum*.

Nadpritisak ili manometarski pritisak (p_m) predstavlja razliku između apsolutnog pritiska i atmosferskog pritiska ako je apsolutni pritisak veći od atmosferskog pritiska ($p_m = p - p_a$).

Podpritisak ili vakuumski pritisak (p_v) predstavlja razliku između atmosferskog pritiska i apsolutnog pritiska ako je atmosferski pritisak veći od apsolutnog pritiska ($p_v = p_a - p$).

Pritisak računamo od tzv. apsolutne nule odnosno od potpunog vakuuma, tako da **apsolutni pritisak** predstavlja pritisak mjereno od apsolutne nule. Apsolutni pritisak dobija se na način da na manometru očitamo pritisak dodamo ili ga oduzmemo od atmosferskog pritiska (slika 4.9).



Slika 4.9. Šema pritiska

Na slici 4.9. apsolutni pritisak označen je sa p dok je atmosferski ili barometarski pritisak označen sa p_a . Kod nadpritiska imamo da je apsolutni pritisak veći od atmosferskog ($p > p_a$), a kod podpritiska apsolutni pritisak je manji od atmosferskog ($p < p_a$).

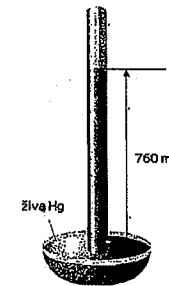
Mjerni instrumenti za mjerenje pritiska mogu se podijeliti na osnovu slijedećih karakteristika, i to:

a) prema vrsti mjernog pritiska:

- barometri (mjerenje atmosferskog pritiska),
- manometri (mjerenje predpritiska ili apsolutnog pritiska),
- vakumetri (mjerenje podpritiska ili vakuuma).

b) prema principu djelovanja:

- klipni,
- sa tekućinom,
- električni,
- kombinovani.

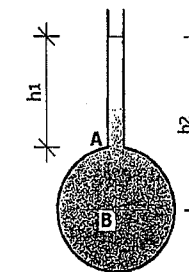


Slika 4.10. Živin barometar

Barometri sa živom su najpogodniji za apsolutna mjerenja pritiska. Oni se sastoje od staklene cijevi koja je na jednom svom kraju zatvorena i napunjena živom (slika 4.10). Staklena cijev se potom svojim otvorenim krajem uroni u posudu u kojoj se nalazi živa. Živa se u cijevi spusti stvarajući vakuum iznad nje, dok visina stupca žive zavisi od atmosferskog pritiska, odnosno imamo da je 1 atmosfera = 760 mm žive (Hg).

$$1 \text{ atmosfera} = 101325 \text{ Pa}$$

Mjerenje pritiska može se vršiti i pijezometrima koji su ujedno i najjednostavniji instrumenti za određivanje pritiska (slika 4.11).

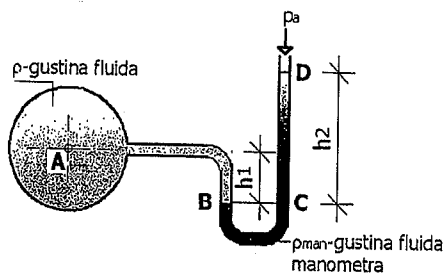


Slika 4.11. Pijezometar

Pijezometar predstavlja takav instrument gdje na posudu se „priključuje“ uska cijev koja je otvorena prema gore i na koju djeluje atmosferski pritisak. U ovoj uskoj cijevi tečnost gustine ρ će se popeti do određene visine. Sa prethodne slike vidi se da pritisak u tački A iznosi: $p_A = p_a + \rho g \cdot h_1$, a pritisak u tački B iznosi: $p_B = p_a + \rho g \cdot h_2$, gdje je p_a atmosferski pritisak koji djeluje na površini tečnosti u uskoj otvorenoj cijevi.

U-cijevi koje su ispunjene tečnošću predstavljaju takođe instrumente za određivanje pritiska (slika 4.12). Cijev se do određene visine napuni obično vodom ili živom, te jedan kraj cijevi spojimo sa prostorom u kome želimo mjeriti pritisak dok je drugi kraj cijevi otvoren i nalazi se pod uticajem

atmosferskog pritiska. Princip mjerenja svodi se na mjerenje visine stupca tečnosti u cijevi koji svojom težinom drži ravnotežu mjerenom pritisku.



Slika 4.12. Instrument za mjerenje pritiska sa U-cijevi

Određivanje pritiska u tački A možemo riješiti na sljedeći način:
Pritisak u tački B i tački C je isti i iznosi na osnovu prethodne slike:

$$p_B = p_C \quad (4.24)$$

$$p_B = p_A + \rho g \cdot h_1 \quad (4.25)$$

$$p_C = p_a + \rho_{man} g \cdot h_2 \quad (4.26)$$

gdje je;

p_a - atmosferski pritisak,

p_A - pritisak u tački A ,

ρ - gustina fluida u kojem mjerimo pritisak,

ρ_{man} - gustina fluida u manometru.

Na osnovu prethodnih iztaza može se napisati sljedeće:

$$p_A + \rho g \cdot h_1 = p_a + \rho_{man} g \cdot h_2 \quad (4.27)$$

$$p_A - p_a = \rho_{man} g \cdot h_2 - \rho g \cdot h_1 \quad (4.28)$$

Interesuje nas koliki je nadpritisak u tački A , pa onda se može napisati izraz:

$$p = p_A - p_a \quad (4.29)$$

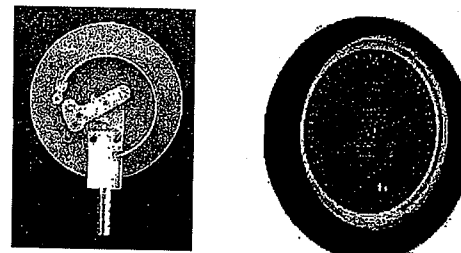
$$p = \rho_{man} g \cdot h_2 - \rho g \cdot h_1 \quad (4.30)$$

Manometar je mjerni instrument koji prikazuje razliku pritiska nekog fluida (tečnost ili gas) i referentnog pritiska (uglavnom atmosferski). Manometrima mjerimo razliku pritiska između dvije tačke odnosno manometar pokazuje samo razliku između atmosferskog i pritiska koji se mjeri. Prema načinu tada manometri se dijele na mehaničke i na hidrauličke.

Hidraulički manometar radi na principu spojenih posuda i u obliku je latiničnog slova U i djelimično ispunjen sa radnom tekućinom (voda, živa). Jedan kraj cijevi je obično otvoren prema normalnom atmosferskom pritisku, a drugi je spojen sa izvorom mjerenog pritiska. Tekućina u cijevi će se pomjerati na različite visine u zavisnosti od razlike pritisaka na krajevima cijevi. Pošto cijev mora biti baždarena onda razlika pritisaka se jednostavno očitava sa skale.

Mehanički manometar mjeri pritisak na osnovu deformacije elastičnog tijela, koje mijenja dimenzije pod djelovanjem pritiska. Elastični element je uglavnom izdužena komora koja je vezana sa kazaljkom koja pokazuje pritisak na baždarenoj skali. Elastične izdužene komore su Burdonova cijev, membrana i kapsula.

Burdonova cijev dobila je ime po francuskom naučniku Bourdonu, koji ju je osmislio 1849. godine. To je spljoštena metalna cijevčica čiji je jedan kraj otvoren i pričvršćen za kućište da se ne može pomjerati i izložen je djelovanju pritiska koji se mjeri. Drugi kraj cijevi je zatvoren, ali se slobodno pokreće kad se cijev steže i rasteže pod djelovanjem pritiska. To pokretanje zatvorenog kraja cijevi se prenosi na kazaljku preko podesnog i odgovarajućeg mehanizma.



Slika 4.13. Manometar sa Burdonovom cijevi

Membrana je elastična gumena, plastična, ili metalna pločica koja je postavljena između dvije komore, čija razlika u pritiscima se želi mjeriti. Pod uticajem pritiska dablazi do savijanja pločice, koje se prenosi na kazaljku baždarene skale. Da bi se postigla veća osjetljivost, membrana se izrađuje sa koncentričnim talasastim naborima.

Zadatak 4.3.1.

Koliki će biti izmjereni pritisak p i apsolutni pritisak vode p_{aps} na dubini 8,0 m ispod površine, ukoliko je $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, $p_a = 101 \text{ kN/m}^2$?

Rješenje:

Izmjereni pritisak na dubini 8,0m od površine vode iznosi:

$$p = \rho g \cdot h = 1000 \cdot 9,81 \cdot 8,0 = 78480 \text{ N/m}^2 = 78,48 \text{ kN/m}^2$$

Apsolutni pritisak:

$$p_{aps} = p + p_a = 78,48 + 101 = 179,48 \text{ kN/m}^2.$$

Zadatak 4.3.2.

Manometar koji je spojen na cijev pokazuje negativnu vrijednost od 50mm žive. Gustina žive iznosi $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$. Koliko iznosi apsolutni pritisak u cijevi ako je atmosferski pritisak 1 bar?

Rješenje:

$$p_a = 1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$p_{\text{aps}} = p + p_a = \rho g \cdot h + p_a$$

$$p_{\text{aps}} = -13600 \times 9,81 \times 0,05 + 10^5 \text{ N/m}^2 = 93329,2 \text{ N/m}^2$$

Zadatak 4.3.3.

Na kojoj visini se nalazi voda da bi barometar izmjerio atmosferski pritisak?

Rješenje:

$$p_a = 1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$p = \rho g \cdot h \Rightarrow 10^5 = \rho g \cdot h$$

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{10^5}{1000 \cdot 9,81} = 10,194 \text{ m}$$

Zadatak 4.3.4.

Posuda od tvrde plastike ima površinu poprečnog presjeka od $4,0 \text{ m}^2$ u nivou površine vode. Gustina vode iznosi 1000 kg/m^3 . U posudu sipamo pijesak i nakon određenog vremena ona potone za 50 cm mjereno od površine vode. Odrediti težinu pijeska koji smo sipali u posudu.

Rješenje:

Površina poprečnog presjeka posude u nivou vode iznosi $S = 4,0 \text{ m}^2$.

Posuda potone u vodu nakon sipanja pijeska za $h = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$.

$$p = \frac{F}{S} = \frac{G}{S} \quad F = G \text{ predstavlja težinu pijeska.}$$

$$p = \rho g \cdot h = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,5 = 4905 \text{ N/m}^2$$

$$F = G = p \cdot S = 4905 \text{ (N/m}^2) \cdot 4,0 \text{ (m}^2) \Rightarrow F = G = 19620 \text{ (N)} = 19,62 \text{ (kN)}$$

Zadatak 4.3.5.

Na dijelu posude iz prethodnog zadatka pojavio se otvor ispod površine vode. Površina otvora iznosi $3,0 \text{ cm}^2$, a nalazi se na dubini 30 cm mjereno od površine vode. Treba odrediti najmanju veličinu sile kojom moramo djelovati na otvor da bi spriječili prodiranje vode u posudu.

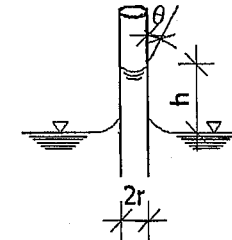
Rješenje:

Površina poprečnog presjeka otvora: $S = 3,0 \text{ cm}^2 = 0,0003 \text{ m}^2$.

Dubina, mjereno od površine vode, na kojoj se pojavio otvor: $h = 30 \text{ cm}$.

$$p = \rho g \cdot h = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,3 = 2943 \text{ (N/m}^2)$$

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S = 2943 \text{ (N/m}^2) \cdot 0,0003 \text{ (m}^2) = 0,8829 \text{ (N)}$$

Zadatak 4.3.6.

Za datu pijezometrijsku cijev od plastike potrebno je:

- Odrediti kapilarnu visinu vode u pijezometru pri temperaturi 20°C . Ugao vlaženja $\theta = 15^\circ$ (voda – plastika). Poluprečnik cijevi $r = 1,5 \text{ mm}$.
- Odrediti kapilarnu visinu žive u pijezometru pri temperaturi 20°C . Površinski napon $\sigma_{\text{Hg}} = 0,435 \text{ N/m}$ (živa – vazduh). Ugao vlaženja $\theta = 130^\circ$ (živa – staklo). Poluprečnik cijevi $r = 2,0 \text{ mm}$.
- Koliki mora biti poluprečnik pijezometra u kome se nalazi voda temperature 40°C , da bi kapilarna visina vode u pijezometru bila $2,0 \text{ mm}$? Pretpostavka: međupovršina fluida je hemisferična.

Rješenje:

Uslov ravnoteže sila: $\cos \theta \cdot F_0 = F_G$

$$F_0 = 2r\pi \cdot \sigma$$

$$F_G = r^2\pi \cdot h \cdot \rho g$$

$$h = \frac{\cos \theta \cdot 2r\pi \cdot \sigma}{r^2\pi \cdot \rho g} = \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{\rho g \cdot r}$$

- Površinski napon vode pri temperaturi 20°C (vidi prilog broj 1)
 $\sigma_{\text{H}_2\text{O}}(20^\circ\text{C}) = 72,7 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$
Gustina vode pri temperaturi 20°C : $\rho_{\text{H}_2\text{O}}(20^\circ\text{C}) = 998,23 \text{ kg/m}^3$

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{\rho g \cdot r} = \frac{2 \cdot 72,7 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 15^\circ}{998,23 \cdot 9,81 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = 0,00956 \text{ m} = 9,56 \text{ mm}$$

- b) Gustina žive pri temperaturi 20°C (vidi prilog broj 2)

$$\rho_{Hg}(20^\circ C) = 13546 \text{ kg/m}^3$$

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{\rho g \cdot r} = \frac{2 \cdot 0,435 \cdot \cos 130^\circ}{13546 \cdot 9,81 \cdot 2,0 \cdot 10^{-3}} = -0,00211 \text{ m} = -2,11 \text{ mm}$$

c)
$$r = \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{\rho g \cdot h}$$

Površinski napon vode pri temperaturi 20°C (vidi prilog broj 1)

$$\sigma_{H_2O}(40^\circ C) = 69,6 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

Gustina vode pri temperaturi 40°C: $\rho_{H_2O}(40^\circ C) = 992,24 \text{ kg/m}^3$ Hemisferičan kontakt (interface) $\Rightarrow \theta = 0^\circ$

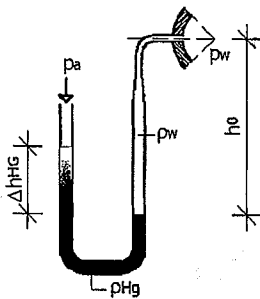
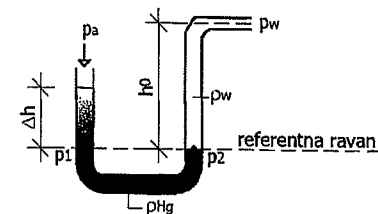
$$r \geq \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{\rho g \cdot h} = \frac{2 \cdot 69,6 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 0^\circ}{992,24 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0,00715 \text{ m}$$

$$r \geq 7,15 \text{ mm}$$

Zadatak 4.3.7.

U-manometar je ispunjen živom i povezan je sa cijevi za vodu. Jedna strana U-manometra otvorena je ka atmosferi (vlada atmosferski pritisak p_a). Kolika je veličina apsolutnog pritiska p_w ?

Zadato: $p_a = 101300 \text{ Pa}$; $\Delta h_{Hg} = 50 \text{ mm}$; $h_0 = 100 \text{ mm}$;
 $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$.

**Rješenje:**

Ravnoteža pritiska na referentnoj ravni:

$$p_1 = p_2$$

$$p_0 + \rho_{Hg} g \cdot \Delta h_{Hg} = p_w + \rho_w g \cdot h_0$$

$$p_w = p_0 + g \cdot (\rho_{Hg} \cdot \Delta h_{Hg} - \rho_w \cdot h_0)$$

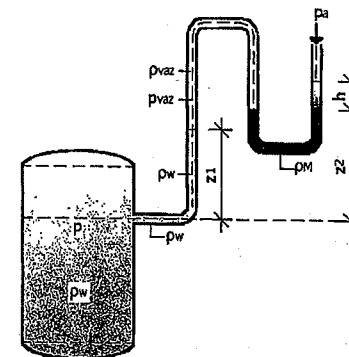
$$p_w = 101300(\text{Pa}) + 9,81(\text{m/s}^2) \cdot [13600(\text{kg/m}^3) \cdot 0,05(\text{m}) - 1000(\text{kg/m}^3) \cdot 0,1(\text{m})]$$

$$p_w = 107(\text{kPa})$$

Zadatak 4.3.8.

U jednoj U-cijevi ispunjenoj živom, prema datoj slici, nalaze se zarobljeni mjehurići vazduha. Odrediti pritisak u rezervoaru koji je ispunjen vodom uz zanemarivanje težine mjehurića vazduha.

Zadato: $z_1 = 0,6 \text{ m}$; $z_2 = 0,8 \text{ m}$; $h = 0,32 \text{ m}$; $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\rho_M = 13600 \text{ kg/m}^3$;
 $p_0 = 101300 \text{ Pa}$.

**Rješenje:**

Pritisak na granici između vode i vazduha iznosi:

$$p_{vaz} = p - \rho_w g \cdot z_1$$

Sa zanemarivanjem težine mjehurića vazduha, pritisak na granici vazduh-živa iznosi:

$$p_{\text{vaz}} = p_a + \rho_M g \cdot h$$

Kada izjednačimo veličinu pritiska p_{vaz} na granici voda-vazduh sa pritiskom p_{vaz} na granici vazduh-živa, imamo:

$$p - \rho_w g \cdot z_1 = p_a + \rho_M g \cdot h \Rightarrow p - p_a = \rho_M g \cdot h + \rho_w g \cdot z_1$$

$$p = p_a + \rho_M g \cdot h + \rho_w g \cdot z_1$$

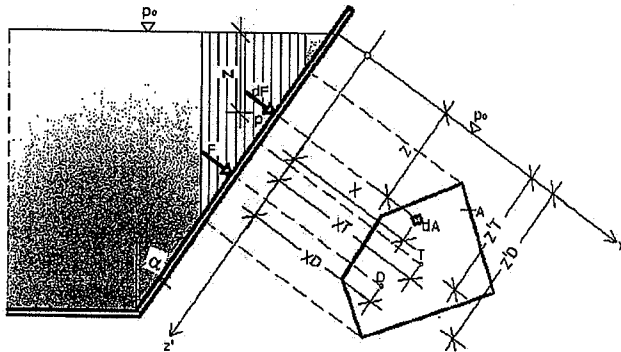
$$p = 101300 + 13600 \cdot 9,81 \cdot 0,32 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,6$$

$$p = 138053,12 \text{ Pa}$$

4.4. Sila hidrostatičkog pritiska na ravne površine

Poznavanje sila kojima tečnosti pri statičkim uslovima djeluju na određene površine su veoma važne u inženjerskoj praksi, a naročito u građevinskoj djelatnosti. Proračune hidrostatičkih sila na površine možemo podijeliti u dvije osnovne kategorije, i to uticaj tečnosti na ravne površine i uticaj tečnosti na zakrivljene površine. Prvo će se objasniti hidrostatički pritisak tečnosti na ravne površine.

Osnovni zadatak i cilj hidrostatičke je utvrđivanje raspodjele sile dF_p na veoma malu (infinitesimalnu) površinu dA , a potom integrisanje po čitavoj površini A za koju treba odrediti ukupnu silu hidrostatičkog pritiska F_p (slika 4.14). U ovom primjeru površinu označavamo slovom A .



Slika 4.14. Raspored pritiska i rezultantne sile pritiska na dio čvrste proizvoljne površine posude (A) u kojoj se nalazi tečnost u stanju mirovanja

Na osnovu dosadašnjih znanja, poznavajući da pritisak (p) predstavlja odnos sile (F) kroz površinu (A) na koju djeluje ta sila, možemo napisati:

$$dF_p = -p \cdot dA \quad F_p = - \int p dA \quad (4.31)$$

$$p = p_0 + \rho g \cdot (z_0 - z) \quad (4.32)$$

gdje je;

p_0 – pritisak na vodnom licu koje predstavlja apcisu koordinatnog sistema (z_0 =vodno lice),

p – pritisak na određenoj dubini tečnosti z .

Prema slici 4.14. vidi se da raspodjela hidrostatičkog pritiska po datoj konturi može se odrediti na osnovu tzv. „oborenog“ koordinatnog sistema $x - z'$, gdje je $z = z'$ (prema slici 4.14), dok korištenjem izraza 4.32 i usvajanjem da $z_0 = 0$ $\cos \alpha > 0$, dobijamo izraz:

$$p = p_0 + \rho g \cdot z = p_0 + \rho g \cdot z' \cos \alpha \geq 0 \quad (z, z' \geq 0) \quad (4.33)$$

Na infinitesimalnu površinu dA djeluju sila hidrostatičkog pritiska dF_p koja je data izrazom 4.31 (slika 4.14). Za usvojeni koordinatni sistem $z' - x$ dobija se da sila pritiska na infinitesimalnu površinu dA glasi:

$$dF = \rho g \cdot z' \cos \alpha \cdot dA \quad (4.34)$$

Silu hidrostatičkog pritiska F_p pisat ćemo kao silu F odnosno bez indeksnih oznaka radi što lakšeg shvatanja hidrostatičkog pritiska na ravne površine. Integrisanjem po površini A dobit ćemo ukupnu silu hidrostatičkog pritiska:

$$F = \rho g \cdot z'_T \cos \alpha \cdot A = (p_T - p_0) \cdot A \quad (4.35)$$

$$z'_T = \frac{1}{A} \int_A z' dA \quad (4.36)$$

gdje je;

z'_T – rastojanje tačke težišta površine A od $z'=0$ u koordinatnoj ravni $x - z'$

p_T – pritisak u tački težišta površine A .

U izrazu 4.35 vidi se da rezultantna sila pritiska F na površinu A je jednaka proizvodu razlike pritisaka ($p_T - p_0$) i površine A . Pošto pritisak nije jednako raspodjeljen na cijelu površinu A već se povećava linearno sa povećanjem dubine z odnosno z' , onda tačka hvatišta rezultante neće prolaziti tačkom težišta T promatrane površine A , već kroz tačku D čije su koordinate x_D i z'_D (prema slici 4.14.). Da bismo odredili koordinate x_D i z'_D (položaj tačke D), treba koristiti jednačinu ravnoteže momenata oko osa x i z' , odnosno:

$$z'_D = \frac{1}{F} \int_{(A)} z' dF = \frac{I_{xz'}}{Az'^2_s} \quad (4.37)$$

$$z'_D = \frac{1}{F} \int_{(A)} x dF = \frac{I_{xz'}}{Az'^2_s} \quad (4.38)$$

gdje je;

I_{xx} – momenat inercije površine A oko ose x ,

$I_{xz'}$ – centrifugalni momenat površine A oko osa x i z' .

$$I_{xx} = \int_{(A)} z'^2 dA \quad (4.39)$$

$$I_{xz'} = \int_{(A)} xz' dA \quad (4.40)$$

Ako sa I_T označimo momenat inercije oko ose koja je paralelna sa osom x i koja prolazi kroz težište T površine A (slika 4.14), onda za momenat inercije površina važi slijedeći izraz:

$$I_{xx} = I_T + A(z'_T)^2 \quad (4.41)$$

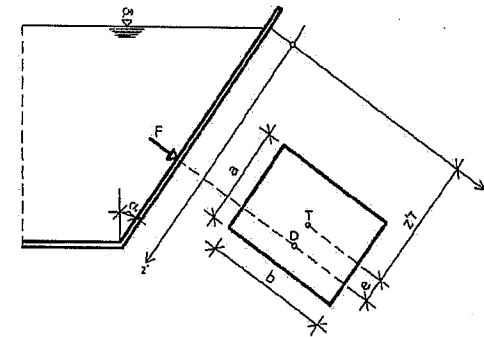
Kada se izraz 4.41 primijeni na izraz 4.37 dobit će se jednačine pomoću kojih se određuje rastojanje e između hvatišta sile pritiska (to je tačka D na slici 4.14) od težišta površine A , pa imamo:

$$e = z'_D - z'_T = \frac{I_T}{Az'^2_T} \geq 0 \quad (4.42)$$

$$I_T = \int_{(A)} (z' - z'_T)^2 dA \quad (4.43)$$

Tačka hvatišta D se nalazi uvijek ispod tačke težišta T promatrane površine A zbog toga što su I_T i z'_T uvijek pozitivni, te e ima uvijek pozitivnu vrijednost (slika 4.14.).

Posmatrajmo slučaj da na jednu jednostavnu pravougaonu površinu A ($A = a \cdot b$) djeluje sila hidrostatičkog pritiska (slika 4.15).



Slika 4.15. Raspored pritiska i rezultantne sile pritiska na pravougaonu površine (A) u kojoj se nalazi tečnost u stanju mirovanja

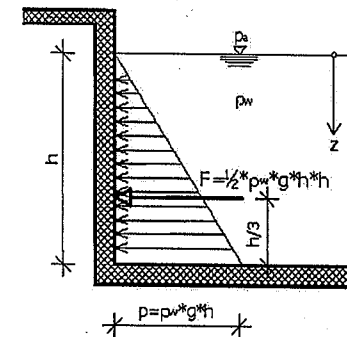
Primjenom prethodno navedenih izraza i jednačina i uvrštavanjem potrebnih veličina u te izraze i jednačine, dobit ćemo slijedeći izraz:

$$e = \frac{a}{6} \quad (4.44)$$

Sila pritiska F za horizontalnu površinu koja se nalazi na dnu (za $\alpha=0$) ima slijedeći izraz:

$$F = (p_0 + \rho g \cdot h) \cdot A \quad (4.45)$$

Na slijedećoj slici (slika 4.16.) se vidi da veličina hidrostatičkog pritiska ispod površine vodnog lica, gdje imamo jednu vrstu tečnosti (u ovom slučaju je voda gustine ρ_w), povećava linearno sa porastom dubine z .



Slika 4.16. Linearno povećanje dijagrama hidrostatičkog pritiska sa dubinom vode

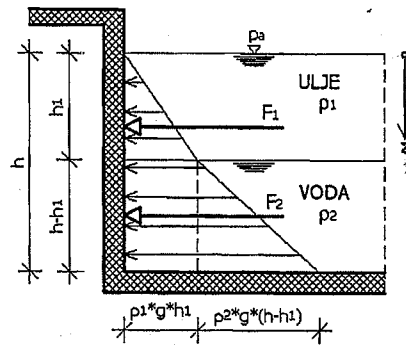
Na slici 4.16. prikazan je dijagram hidrostatičkog pritiska na vertikalni zid bazena u kome je dubina vode h . Dijagram hidrostatičkog pritiska ili opterećenja

od dejstva vode je u obliku trougla. Veličina hidrostatičkog pritiska na nekoj dubini vode z mjereno od površine vodnog lica iznosi $p = \rho_w g \cdot z$ (prema izrazu 4.20), a hidrostatički pritisak na dubini vode h (dno bazena) iznosi $p = \rho_w g h$, kao što vidimo na slici 4.16. Veličina ili intenzitet sile hidrostatičkog pritiska jednak je površini trougla i može se odrediti kao:

$$F = \frac{1}{2}(\rho_w g h) \cdot h = \frac{1}{2} \rho_w g h^2 \quad (\text{N/m}) \quad (4.46)$$

Rezultantna ili ukupna sila hidrostatičkog pritiska F djeluje u težištu trougla na $h/3$ odnosno dijagrama hidrostatičkog pritiska, prema prethodnoj slici.

U hidrotehničkoj praksi susrećemo se sa slučajem gdje u jednoj posudi ili bazenu imamo dvije tečnosti različitih gustina ρ koje se međusobno ne miješaju (slika 4.17.). Jedna tečnost koja ima manju gustinu (ρ_1) i koja je lakša od druge tečnosti nalazi se na određenoj dubini h_1 od površine vodnog lica, a druga sa većom gustinom (ρ_2) nalazi se ispod lakše tečnosti, na dubini $h-h_1$ i sve do dna posude ili bazena.



Slika 4.17. Dijagram hidrostatičkog pritiska dvije tečnosti različitih gustina

Kao što je već navedeno ove dvije tečnosti se međusobno ne miješaju, tako da možemo odrediti veličine hidrostatičkog pritiska na slijedeći način:

- na površini vodnog ogledala ($z=0$) vlada atmosferski pritisak p_a je hidrostatički pritisak jednak nuli,
- na dubini h_1 koja predstavlja i dubinu ulja u posudi, hidrostatički pritisak iznosi:

$$p_1 = \rho_1 g h_1 \quad (4.47)$$

- na dubini h koja je ukupna dubina tečnosti u posudi odnosno koja predstavlja dubinu ulja i vode u datoj posudi, hidrostatički pritisak iznosi:

$$p_2 = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h - h_1) \quad (4.48)$$

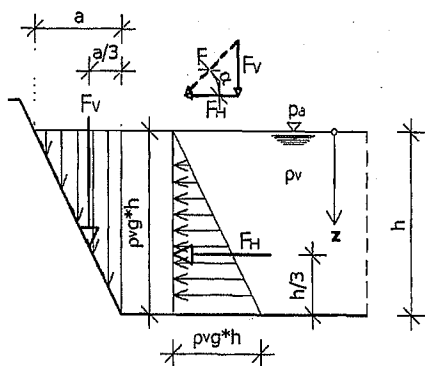
Iz izraza 4.48 vidimo da od površine vode kao tečnosti sa većom gustinom, dolazi do povećanja hidrostatičkog pritiska sa dubine h_1 (ulje sa manjom gustinom). Navedeno povećanje hidrostatičkog pritiska zavisi od gustine tečnosti, u ovom slučaju radi se o vodi, i dubine na kojoj se voda nalazi ($h-h_1$). Veličine ili intenziteti sila hidrostatičkog pritiska ili opterećenja mogu se odrediti na slijedeći način, shodno površinama dijagrama hidrostatičkog pritiska ili opterećenja na zid posude:

$$F_1 = \frac{1}{2}(\rho_1 g h_1) h_1 \Rightarrow F_1 = \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 \quad (4.49)$$

$$F_2 = \frac{\rho_1 g h_1 + [\rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h - h_1)]}{2} \cdot (h - h_1) \quad (4.50)$$

Izraz 4.50 predstavlja površinu trapeza sa dijagrama hidrostatičkog pritiska (slika 4.17.). Sila F_1 koja je intenzitet sile hidrostatičkog pritiska na dubini h_1 koja predstavlja dubinu sloja ulja u posudi i djeluje na $1/3$ od dubine h_1 , a sila F_2 predstavlja intenzitet sile hidrostatičkog pritiska na dubini $h-h_1$ i djeluje u težištu trapeznog dijela dijagrama hidrostatičkog pritiska od vode. Umjesto određivanja intenziteta hidrostatičke sile na trapezni dio dijagrama, možemo odrediti intenzitet sile hidrostatičkog pritiska na pravougaoni dio dijagrama čija površina iznosi $\rho_1 g h_1 \cdot (h - h_1)$ i intenzitet te sile hidrostatičkog pritiska djeluje u težištu pravougaonika, i ostaje nam trougaoni dio dijagrama čija površina iznosi $\frac{1}{2} \rho_2 g (h - h_1) \cdot (h - h_1)$ i čiji intenzitet sile hidrostatičkog pritiska djeluje u težištu tog trougla.

Na slici 4.18. prikazan je kosi zid bazena sa vodom gustine ρ , i dubine h . Hidrostatički pritisak se može razložiti na način da grafički prikažemo dijagrame horizontalnog i vertikalnog hidrostatičkog pritiska ili opterećenja na zid bazena. Na površini vodnog lica vlada atmosferski pritisak i tu je veličina hidrostatičkog pritiska jednaka nuli. Dijagram vertikalnog hidrostatičkog pritiska ili opterećenja odgovara površini trougla koji djeluje na kosi dio zida u pravcu z ose. Kao što se vidi sa slike 4.18. veličine hidrostatičkog pritiska odnosno vrijednosti dijagrama hidrostatičkog pritiska horizontalne i vertikalne komponente zavise od gustine fluida i od dubine vode.



Slika 4.18. Dijagram hidrostatičkog pritiska na kosi zid bazena sa vertikalnom silom pritiska

Veličina ili intenzitet sile horizontalne komponente hidrostatičkog pritiska, sa slike 4.18, po jednom dužnom metru kosog zida bazena iznosi:

$$F_H = \frac{1}{2} \rho_v g h \cdot h \quad (4.51)$$

Veličina ili intenzitet vertikalne komponente hidrostatičkog pritiska po jednom dužnom metru kosog zida bazena, prema slici 4.18, iznosi:

$$F_V = \frac{1}{2} \rho_v g h \cdot a \quad (4.52)$$

Rezultantna sila hidrostatičkog pritiska na kosi zid bazena, po jednom dužnom metru, iznosi:

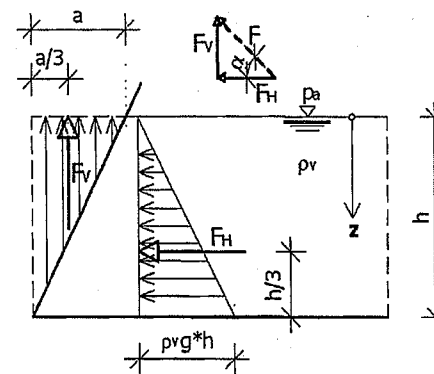
$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \quad (4.53)$$

Smjer rezultantne sile hidrostatičkog pritiska (F) možemo odrediti na osnovu slijedećeg izraza:

$$\tan \alpha = \frac{F_V}{F_H} \quad (4.54)$$

Intenziteti sile horizontalne komponente i vertikalne komponente hidrostatičkog pritiska djeluju u težišta svojih dijagrama, kao što je prikazano na slici 4.18.

Na slici 4.19. prikazan je kosi zid bazena gdje imamo silu potiska u vertikalnom smjeru odnosno u smjeru z ose.



Slika 4.19. Dijagram hidrostatičkog pritiska na kosi zid bazena sa vertikalnom silom potiska

Na slici 4.19. grafički je prikazan dijagram hidrostatičkog pritiska razložen na dijagram u horizontalnom i u vertikalnom pravcu te se može odrediti intenzitet horizontalne komponente sile hidrostatičkog pritiska, po jednom dužnom metru kosog zida bazena:

$$F_H = \frac{1}{2} \rho_v g h \cdot h \quad (4.55)$$

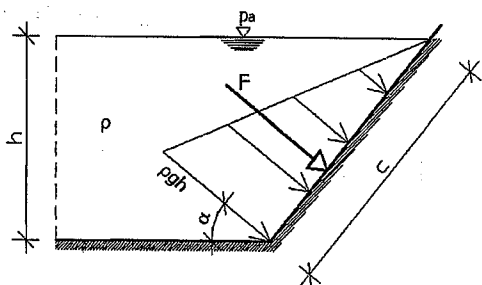
dok se intenzitet vertikalne komponente sile hidrostatičkog pritiska po jednom dužnom metru kosog zida bazena može izračunati kao:

$$F_V = \frac{1}{2} \rho_v g h \cdot a \quad (4.56)$$

Sa slike 4.19. vidi se da vertikalna sila hidrostatičkog pritiska djeluje u suprotnom smjeru od pravca z ose i naziva se silom potiska na kosi zid bazena. U dnu bazena odnosno na mjestu spajanja ploče bazena i kosog zida, sila potiska je najveća, jer imamo najveću dubinu vode h , a na površini vodnog ogledala nema sile potiska odnosno jednaka je nuli (vlada atmosferski pritisak).

Rezultantna sila hidrostatičkog pritiska na kosi zid bazena, po jednom dužnom metru, određuje se na isti način kao i na slici 4.18, odnosno prema izrazu 4.53. Na isti način se određuje ugao djelovanja rezultante sile hidrostatičkog pritiska prema horizontali (izraz 4.54).

Poznato je da sila hidrostatičkog pritiska djeluje upravno na površinu, kao što je prikazano na slici 4.20.

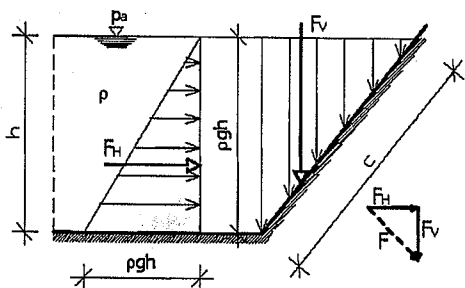


Slika 4.20. Dijagram hidrostatičkog pritiska na kosi zid

Intenzitet sile F hidrostatičkog pritiska na kosi zid odnosno na kosu površinu zida, prema slici 4.20, možemo napisati u slijedećem obliku:

$$F = \frac{1}{2} \rho g h \cdot c \quad (4.57)$$

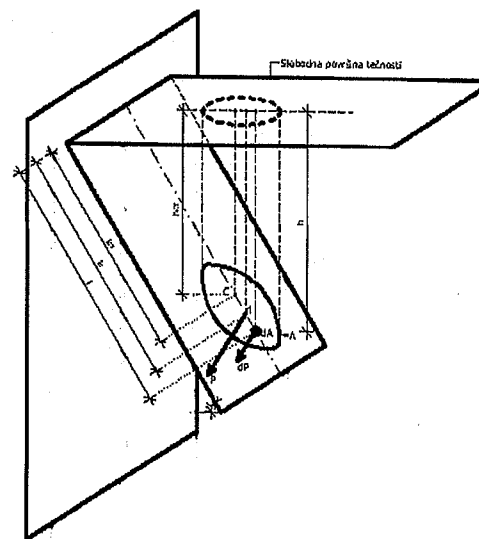
Ukupni dijagram hidrostatičkog pritiska prikazan na slici 4.20 može se razložiti na dijagram horizontalnog i vertikalnog hidrostatičkog pritiska ili opterećenja, prema ranije navedenim objašnjenjima. Komponentni dijagrami hidrostatičkog pritiska (horizontalni i vertikalni dijagram) prikazani su na slici 4.21.



Slika 4.21. Dijagram komponentnog hidrostatičkog pritiska na kosi zid

4.5. Konkretno određivanje hvatišta sile hidrostatičkog pritiska na ravnim površinama

Iz prethodnih razmatranja možemo zaključiti da za prikazivanje sile hidrostatičkog pritiska na razne dijelove građevinskih hidrotehničkih objekta treba da odredimo veličinu i smjer sile. Međutim, za potpuno shvatanje i prikaz dejstva hidrostatičkih sila trebamo odrediti i hvatište rezultante svih sila pritiska. Objašnjenje određivanja hvatišta sile hidrostatičkog pritiska objasniti će se prema slici 4.22.



Slika 4.22. Proračun pritiska na ravan koja sa horizontalom zaklapa određeni ugao

Na slobodnoj površini tečnosti vlada atmosferski pritisak. Trebamo odrediti na kojoj udaljenosti l_d od linije okvašenja se nalazi tačka d koja je hvatište rezultante sile manometarskog pritiska P na ravnu površinu A (slika 4.22). Tačku d nazivamo hvatište pritiska ili centar manometarskog pritiska. Pošto na slici 4.22 se vidi da površina A ima vertikalnu ravan simetrije, onda se hvatište pritiska nalazi na osi simetrije. Za određivanje hvatišta pritiska, u ovom slučaju, potrebno je odrediti udaljenost l_d . Da bismo to postigli možemo koristiti pravilo teorijske mehanike da je moment rezultante sile u odnosu na proizvoljnu osu jednak sumi momenata komponenata u odnosu na tu istu osu. Ukoliko za osu momenta uzmemo liniju okvašenja tečnosti dobit ćemo slijedeći izraz:

$$P \cdot l_d = \int_A l dP \quad (4.58)$$

Pošto je $P = A \cdot \gamma \cdot h_{CT}$ i $dP = \gamma \cdot h \cdot dA = \gamma \cdot l \sin \alpha \cdot dA$, može se napisati jednačinu momenata u slijedećem obliku:

$$\gamma \cdot h_{CT} \cdot A \cdot l = \gamma \cdot \sin \alpha \int_A l^2 dA = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot I_x \quad (4.59)$$

I_x je moment inercije okvašene ili tzv. mokre površine u odnosu na okvašenu liniju, a može se odrediti na osnovu izraza:

$$I_x = \int_A l^2 dA \quad (4.60)$$

Na osnovu izraza 4.59 se može napisati izraz za moment inercije okvašene površine u odnosu na osu koja prolazi kroz težište i paralelna je sa okvašenom linijom I_d :

$$I_d = \frac{\sin \alpha \cdot I_x}{A \cdot h_{CR}} = \frac{I_x}{A \cdot l_{CR}} \quad (4.61)$$

Ako uzmemo u obzir da moment inercije I_x u odnosu na proizvoljnu osu koja je paralelna sa centralnom osom, prethodni izraz može se napisati u slijedećem obliku:

$$I_x = I_o + A \cdot l_{CR}^2 \quad (4.62)$$

Kada izraz 4.62 uvrstimo u izraz 4.61, dobija se:

$$I_d = \frac{I_o + A \cdot l_{CR}^2}{A \cdot l_{CR}} = \frac{I_o}{A \cdot l_{CR}} + \frac{A \cdot l_{CR}^2}{A \cdot l_{CR}} = \frac{I_o}{A \cdot l_{CR}} + l_{CR} \quad (4.63)$$

Izraz 4.63 pokazuje da se centar pritiska odnosno hvatište rezultante manometarskog pritiska tečnosti uvijek nalazi niže od težišta za vrijednost

$\frac{I_o}{A \cdot l_{CR}}$, računajući po kosini površine ili stijenke posude.

U prilogu broj 3 na kraju knjige date su geometrijske karakteristike nekih površina sa izračunatom površinama, glavnim momentima inercije i centrifugalnim momentima inercije površine A .

4.6. Hidrostatička sila pritiska na zakrivljene površine

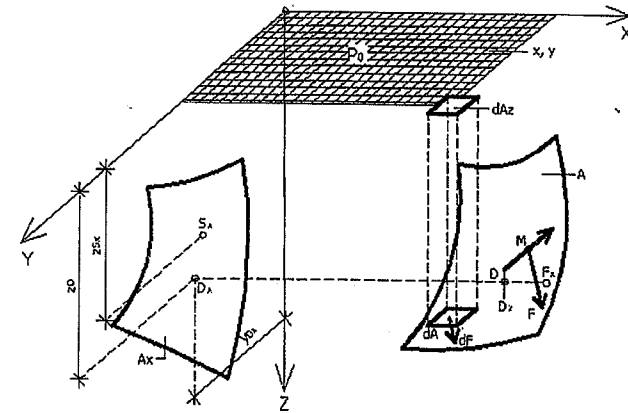
Ako posmatramo jednu zakrivljenu površinu A koja predstavlja dio zida na spoju sa nekom homogenom tečnošću gustine ρ (tečnost u stanju mirovanja), prema slici 4.23, te u tom slučaju rezultatna sila pritiska tečnosti na promatranu površinu A iznosi:

$$F = \int_A (p - p_0) dA = \rho g \int_A z dA \quad (4.64)$$

gdje je;

$(p - p_0)$ – pritisak tečnosti

dA – usmjerena površina sa pozitivnim smjerom normale prema unutrašnjosti tečnosti.



Slika 4.23. Zakrivljena površina A koja predstavlja dio zida na kontaktu sa homogenom tečnošću gustine ρ u stanju mirovanja

U opštem slučaju, komponente sile hidrostatičkog pritiska F_x , F_y , F_z prolaze kroz istu tačku. Ove komponente sile hidrostatičkog pritiska mogu se pomoću metode prostornog poligona svesti na jednu silu intenziteta F i na jedan momenat intenziteta M . Naime, kod zakrivljenih površina koje imaju čitavu površinu A u obliku segmenta kugle, sve komponente sile hidrostatičkog pritiska (F_x , F_y , F_z) prolaze kroz istu tačku. Ta tačka je središte poluprečnika zakrivljenosti kugle ili bolje rečeno, ta tačka predstavlja središte kugle.

U koordinatnom sistemu x - y - z komponente sile hidrostatičkog pritiska možemo napisati u slijedećem obliku:

$$F_x = \rho g \int_{A_x} z dA_x \quad F_y = \rho g \int_{A_y} z dA_y \quad F_z = \rho g \int_{A_z} z dA_z \quad (4.65)$$

Površine A_x , A_y , A_z predstavljaju projekcije površine A na y - z ravan, na x - z ravan i na x - y ravan.

Sa slike 4.23. se vidi da je udaljenost od slobodne površine tečnosti do težišta projekcijske površine A_x (ravan y - z) označena sa z_{sx} . Veličinu horizontalne komponente sile hidrostatičkog pritiska F_x dobit ćemo prema izrazu 4.65, odnosno imamo slijedeće:

$$F = F_x \quad \alpha = 0 \quad z_{s'} = z_{sx} \quad (4.66)$$

Hvatište sile F_x u y - z ravni označeno je tačkom D_x . Koordinate tačke D_x su y_{D_x} , z_{D_x} i mogu se odrediti prema slijedećim izrazima:

$$F_x = \rho g \cdot z_{sx} \cdot A_x \quad z_{Dx} = \frac{I_{yy}}{A_x \cdot z_{sx}} \quad y_{Dx} = \frac{I_{yz}}{A_x \cdot z_{sx}} \quad (4.67)$$

gdje je;

I_{yy} – moment inercije površine A_x oko y ose

I_{yz} – centrifugalni moment površine A_x oko y i z ose.

Komponenta sila hidrostatičkog pritiska F_y može se dobiti na isti način, pa se može zaključiti da horizontalna sila hidrostatičkog pritiska F_{xy} kojom tečnost gustine ρ u stanju mirovanja djeluje na proizvoljnu zakrivljenu površinu A , odgovara zbiru sila pritiska $F_x + F_y$ na projekcijske površine A_x u y - z ravni i A_y u x - z ravni.

$$F_x = \rho g \int_A z dA_z = \rho g \cdot V_F \quad (4.68)$$

gdje je;

V_F – zapremina stupca tečnosti iznad čitave površine A do ravnine slobodne površine tečnosti

$\rho g V_F$ – težina stupca tečnosti iznad čitave površine A do ravnine slobodne površine tečnosti

Određivanje horizontalne i vertikalne komponente sile hidrostatičkog pritiska kao i određivanje ukupne rezultujuće sile hidrostatičkog pritiska na zakrivljenu površinu može se objasniti i na slijedeći način. Ukoliko posmatramo jednu zakrivljenu površinu $A-B$ u koordinatnom sistemu x - z (slika 4.24.) sa dubinom tečnosti (voda) h , onda horizontalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska se može napisati u slijedećem obliku:

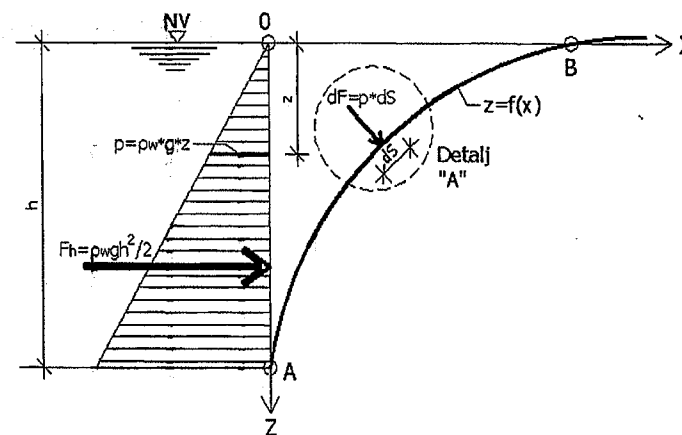
$$F_h = \frac{1}{2} \rho_w g \cdot h \cdot h = \frac{1}{2} \rho_w g \cdot h^2 \quad (4.69)$$

Na osnovu prethodnih razmatranja može se napisati da veličina hidrostatičkog pritiska na proizvoljnoj dubini z od površine vodnog ogledala iznosi:

$$p = \rho_w g \cdot z \quad (4.70)$$

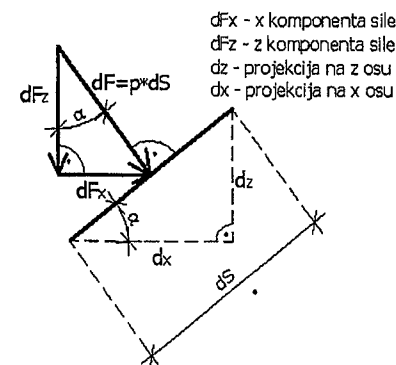
Na osnovu izraza 4.1 može se napisati izraz za elementarnu silu pritiska dF na osnovu poznatog hidrostatičkog pritiska p i elementarne zakrivljene površine dS na koju djeluje pritisak, te imamo:

$$dF = p \cdot dS \quad (4.71)$$



Slika 4.24. Dijagram horizontalne komponente hidrostatičkog pritiska na zakrivljenu površ $A-B$

Na slici 4.25. prikazan je detalj A sa dejstvom elementarne sile hidrostatičkog pritiska dF na zakrivljenu površinu dS .



Slika 4.25. Detalj dejstva elementarne sile hidrostatičkog pritiska na zakrivljenu površinu dS

Na slici 4.25. se vidi da je dF_x komponenta sile hidrostatičkog pritiska u x pravcu, a dF_z je komponenta sile hidrostatičkog pritiska u z pravcu. Sa dz je označena projekcija elementarne zakrivljene površine dS u pravcu z ose, a sa dx u pravcu x ose.

Na osnovu slike 4.25 mogu se napisati slijedeći izrazi:

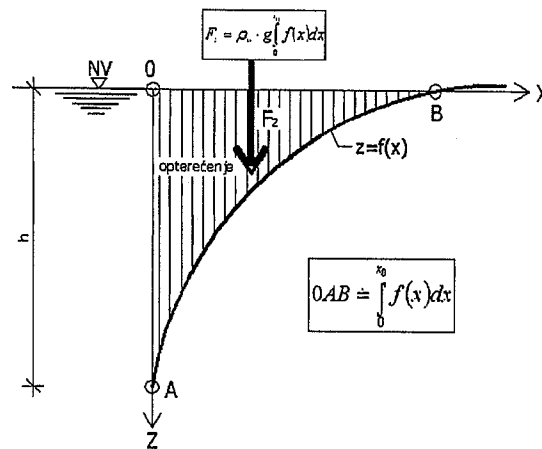
$$\sin \alpha = \frac{dF_z}{dF_x} ; dF_x = p dz \Rightarrow \sin \alpha = \frac{p dz}{p dS} = \frac{dz}{dS} \quad (4.72)$$

$$\cos \alpha = \frac{dF_z}{dS} ; dF_z = p dz \Rightarrow \cos \alpha = \frac{p dz}{p dS} = \frac{dz}{dS} \quad (4.73)$$

Komponentu silu hidrostatičkog pritiska F_h u pravcu x ose (sila F_x) sa dubinom vode h pišemo u slijedećem obliku:

$$F_x = \int_0^h p dz = \rho_w g \int_0^h z dz = \frac{1}{2} \rho_w g \cdot h^2 = F_h \quad (4.74)$$

Na slici 4.26. prikazan je dijagram vertikalne komponente hidrostatičkog pritiska na zakrivljenu površinu $A-B$ sa intenzitetom sile hidrostatičkog pritiska u pravcu z ose (vertikalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska). Na osnovu prethodnih razmatranja može se zaključiti da se hidrostatički pritisak na zakrivljenu površinu mijenja u ovisnosti od dubine tečnosti i veličine gustine tečnosti.



Slika 4.26. Dijagram vertikalne komponente hidrostatičkog pritiska na zakrivljenu površ $A-B$

Intenzitet vertikalne komponente sile hidrostatičkog pritiska na zakrivljenu površinu može se napisati u slijedećem obliku:

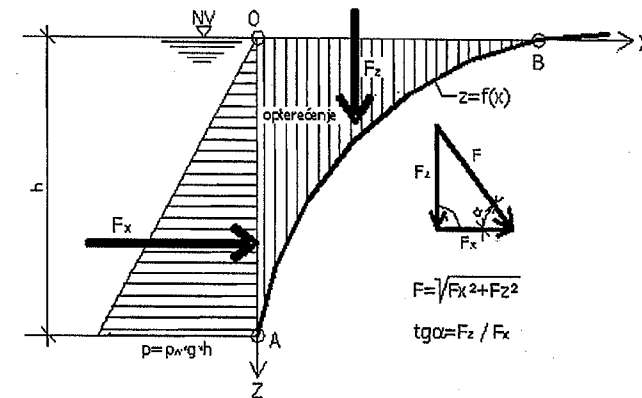
$$F_z = \int_0^{x_0} p dx = \rho_w g \int_0^{x_0} z dx \quad (4.75)$$

Kako je $z=f(x)$ na zakrivljenu površinu, onda intenzitet vertikalne komponente sile hidrostatičkog pritiska F_z možemo napisati u obliku:

$$F_z = \rho_w g \left[\int_0^{x_0} f(x) dx \right] \quad (4.76)$$

gdje površina OAB , prema slici 4.26, odgovara izrazu $\int_0^{x_0} f(x) dx$.

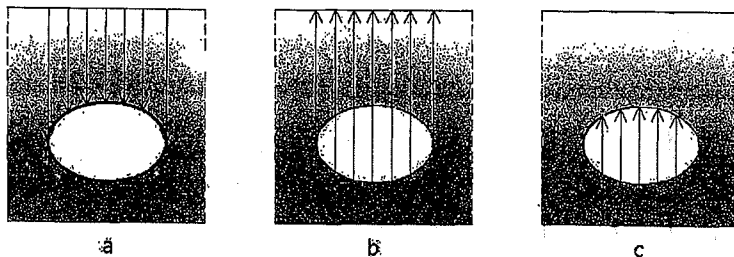
Grafički prikaz hidrostatičkog pritiska na zakrivljenu površinu sa komponentama pritiska u pravcu horizontalne i vertikalne ose dat je na slici 4.27, sa nacrtanim komponentnim dijagramima hidrostatičkog pritiska i intenzitetima sile hidrostatičkog pritiska u pravcu x i z ose, kao i rezultantna sila hidrostatičkog pritiska sa svojim smjerom.



Slika 4.27. Rezultantna sila hidrostatičkog pritiska na zakrivljenu površinu

4.7. Arhimedov zakon

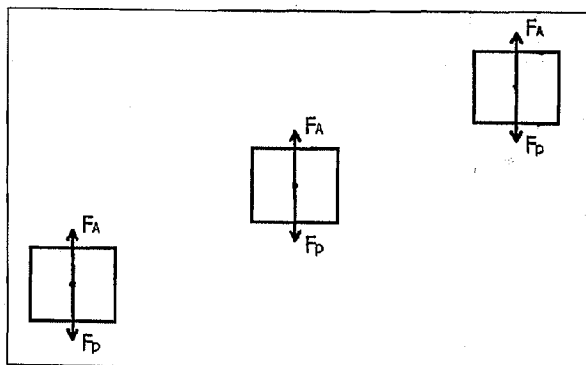
Na svako tijelo koje je potopljeno u tečnosti djeluje sila potiska koja je jednaka težini tijelom istisnute tečnosti. Ovaj zakon je opšti i važi za sve fluide, što znači tečnosti i gasove, ali je prvo otkriven kod tečnosti. Navedenim zakonom moguće je objasniti zbog čega čamac pliva, a vazdušni balon leti. Ako je sila potiska jednaka težini tijela, onda je tijelo u stanju mirovanja. Arhimedov zakon se kratko može definisati na slijedeći način: Tijelo uronjeno u tečnost „lakše“ je za težinu istisnute tečnosti.



Slika 4.28. Grafički prikaz Arhimedovog zakona

Hidrostatski pritisak koji djeluje sa gornje strane tijela (slika 4.28., a) je manji od hidrostatskog pritiska sa donje strane (slika 4.28., b). Razlika ova dva pritiska rezultira silom koja potiskuje ili „tjera“ tijelo prema gore odnosno čini ga lakšim (slika 4.28., c). Ovu silu koja djeluje na tijelo uronjeno u tečnost nazivamo **uzgon**.

Posmatrajmo tijelo koje je potopljeno u tečnosti, kao što je prikazano na slici 4.29. Moguća su tri slučaja u ovisnosti od odnosa gustine tijela i gustine tečnosti u koju je to tijelo potopljeno.



Slika 4.29. Tijelo potopljeno u tečnosti – slučajevi ravnoteže sile potiska i težine tijela

Na jedno tijelo u fluidu, prikazano na slici 4.29., djeluju dvije sile koje djeluju na težište tijela. To je sila potiska i težina tijela. Potisak u homogenom fluidu može se opisati kao:

$$F_A = \rho_f \cdot g \cdot V \quad (4.77)$$

gdje je:

ρ_f – gustina fluida,
 g – ubrzanje sile Zemljine teže,
 V – zapremina istisnute tečnosti.

Na potopljeno tijelo djeluje i sila težine koja za homogeno tijelo, koja iznosi:

$$F_p = \rho_t \cdot g \cdot V \quad (4.78)$$

gdje je:

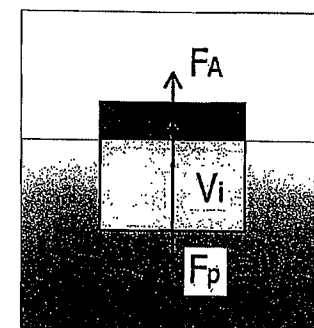
ρ_t – gustina tijela koje je potopljeno,
 g – ubrzanje sile Zemljine teže,
 V – zapremina istisnute tečnosti.

F_A je sila potiska, a F_p predstavlja težinu tijela. Uzrok potiska je postojanje gravitacije, kao i za težinu, pa obje sile imaju isti pravac, ali suprotan smjer. Rezultanta ove dvije sile je istog pravca, a intenzitet i smjer zavisi od toga koja je sila veća. Za tijelo potopljeno u neki fluid, moguća su tri slučaja (kao što je prikazano na slici 4.29) u zavisnosti od odnosa ove dvije sile, i to:

- Tijelo tone ili pada, jer je $F_A < F_p$, odnosno $\rho_n < \rho_t$ i tijelo ubrzava u smjeru dejstva gravitacione sile.
- Tijelo je u položaju ravnoteže, jer je $F_A = F_p$, odnosno $\rho_n = \rho_t$ i tijelo miruje (ili se nalazi u stanju ravnomjernog kretanja ako zanemarimo trenje u fluidu).
- Tijelo izranja, odnosno penje se i ovo je slučaj kada je $F_A > F_p$, odnosno $\rho_n > \rho_t$.

Ukoliko tijelo pliva u fluidu, ono je samo dijelom potopljeno (zapremina V_i) i ravnoteža je uspostavljena između težine i potiska koji nastaje istiskivanjem dijela od ukupne zapremine čvrstog tijela (slika 4.30.) odnosno:

$$\rho_f \cdot g \cdot V_i = \rho_t \cdot g \cdot V \quad (4.79)$$



Slika 4.30. Ravnoteža sile kod tijela koje pliva

Iz izraza 4.79, dobijamo slijedeći odnos između zapremina i gustina:

$$\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_i}{\rho_f} \quad (4.80)$$

Na osnovu prethodnog izraza možemo izračunati gustinu tijela prethodno poznavajući njegovu zapreminu.

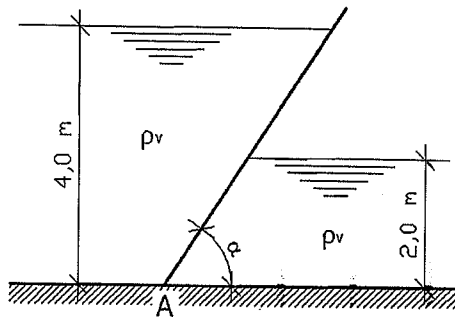
Prema izrazu 4.80 mogu se dobiti veoma zanimljivi rezultati proračuna. Na primjer, promatrajmo ledeni brijeg koji plovi morem. Gustina leda u plivajućem ledenom brijegu neka iznosi 900 kg/m^3 , što je manje od gustine morske vode koja iznosi 1025 kg/m^3 . Odnos gustina je jednak odnosu zapremina, što direktno dovodi do zaključka da je 87,8% ledenog brijega ispod površine vode.

4.8. Riješeni zadaci iz hidrostatičke

Zadatak 4.8.1.

Za kosi zatvarač, prema slici, treba nacrtati dijagram hidrostatičkog pritiska, odrediti intenzitete sila hidrostatičkog pritiska te odrediti ukupnu (rezultantnu) silu hidrostatičkog pritiska kao i njen smjer (ugao α). U tački A (uklješten oslonac) odrediti veličinu momenta savijanja usljed dejstva hidrostatičkog pritiska (opterećenja).

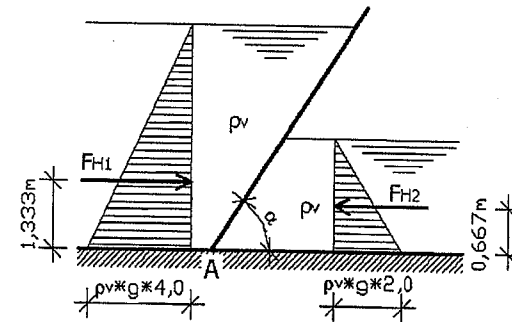
Zadato: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $\alpha = 60^\circ$.



RJEŠENJE

Zadatak će se riješiti razlaganjem dijagrama hidrostatičkog pritiska na dijagram horizontalnog i na dijagram vertikalnog pritiska.

Horizontalna komponenta hidrostatičkog pritiska:

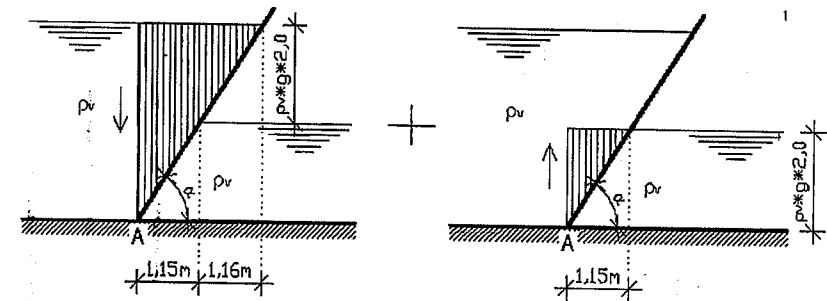


$$F_{H1} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot 4,0 \cdot 4,0 = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 4,0 \cdot 4,0 = 78480 \text{ N} = 78,48 \text{ kN/m'}$$

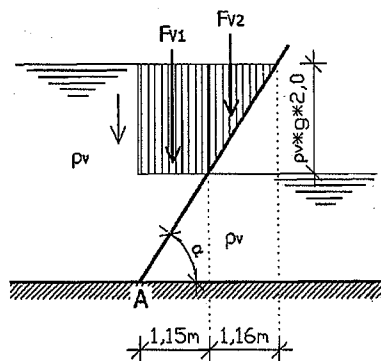
$$F_{H2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot 2,0 \cdot 2,0 = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,0 \cdot 2,0 = 19620 \text{ N} = 19,62 \text{ kN/m'}$$

$$F_H = F_{H1} - F_{H2} = 78,48 - 19,62 = 58,86 \text{ kN/m'}$$

Vertikalna komponenta hidrostatičkog pritiska:



Nakon skraćivanja dijagrama vertikalne komponente hidrostatičkog pritiska (radi se o istom fluidu – ista gustina), dobijamo slijedeći dijagram vertikalne komponente hidrostatičkog pritiska:



$$F_{v1} = \rho_v \cdot g \cdot 2,00 \cdot 1,15 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,00 \cdot 1,15 = 22563 \text{ N/m} = 22,56 \text{ kN/m}$$

$$F_{v2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot 2,00 \cdot 1,16 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,00 \cdot 1,16 = 11379,6 \text{ N/m} = 11,37 \text{ kN/m}$$

$$F_v = F_{v1} + F_{v2} = 22,56 + 11,37 = 33,93 \text{ kN/m} \quad \downarrow$$

Rezultantna sila hidrostatičkog pritiska:

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_v^2} = \sqrt{58,86^2 + 33,93^2} = 67,94 \text{ kN/m}$$

Smjer rezultantne sile hidrostatičkog pritiska:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_v}{F_H} = \frac{33,93}{58,86} = 0,5766 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

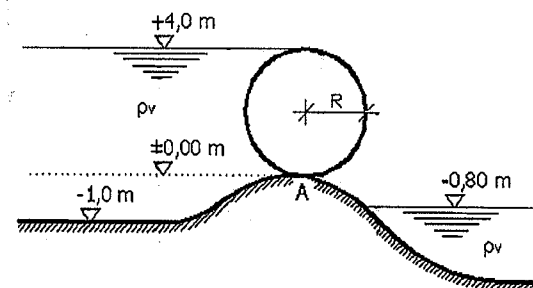
Moment savijanja u uklještenom osloncu A:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow F_{H1} \cdot 1,333 - F_{H2} \cdot 0,667 + F_{v1} \cdot 0,575 + F_{v2} \cdot 1,536 \\ M_A &= 78,48 \cdot 1,333 - 19,62 \cdot 0,667 + 22,56 \cdot 0,575 + 11,37 \cdot 1,536 \\ M_A &= 121,98 \text{ kNm/m} \end{aligned}$$

Zadatak 4.8.2.

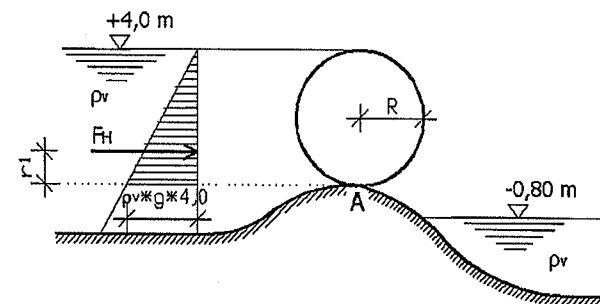
Za dati valjkasti zatvarač nacrtati i odrediti komponente dijagrame hidrostatičkog pritiska zatim izračunati rezultantnu hidrostatičku silu kao i njen smjer (ugao α) kao i njenu vertikalnu udaljenost od tačke A.

Zadato: $R=2,0 \text{ m}$; $\rho_v=1000 \text{ kg/m}^3$; $g=9,81 \text{ m/s}^2$; $b=1,0 \text{ m}$.



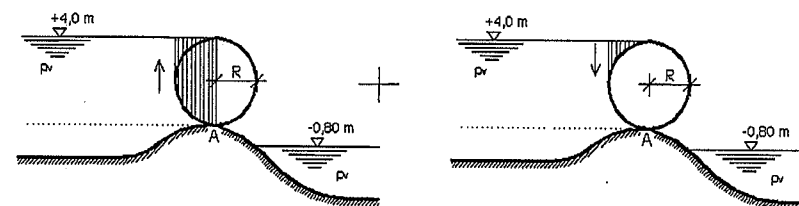
RJEŠENJE

Dijagram i intenzitet sile horizontalne komponente hidrostatičkog pritiska:

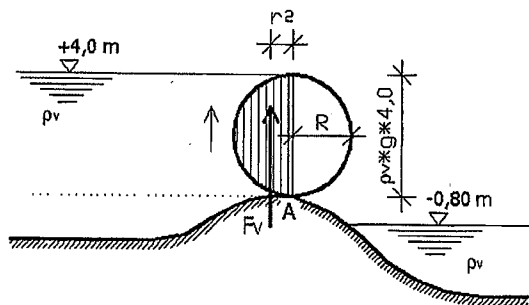


$$F_H = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot 4,0 \cdot 4,0 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 4,0 \cdot 4,0 = 78480 \text{ N/m} = 78,48 \text{ kN/m}$$

Dijagram i intenzitet sile vertikalne komponente hidrostatičkog pritiska:



Nakon sređivanja dijagrama vertikalne komponente hidrostatičkog pritiska, dobijamo slijedeći dijagram vertikalnog hidrostatičkog pritiska:



$$F_V = \rho_v \cdot g \cdot \frac{D^2 \pi}{4} = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{4,0^2 \pi}{8} = 61606,8 \text{ N/m} = 61,60 \text{ kN/m}$$

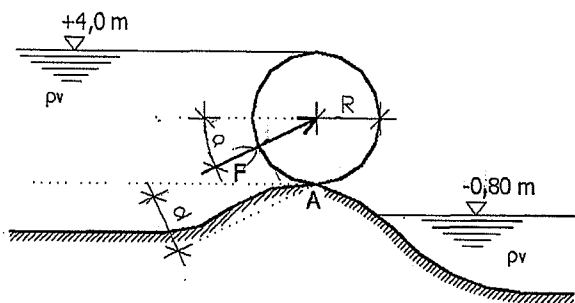
Rezultantna sila hidrostatičkog pritiska:

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{78,48^2 + 61,60^2} = 99,77 \text{ kN/m}$$

Smjer dejstva rezultantne sile hidrostatičkog pritiska:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_V}{F_H} = \frac{61,60}{78,48} = 0,7849 \Rightarrow \alpha = 38,13^\circ$$

Vertikalna udaljenost rezultantne sile hidrostatičkog pritiska od tačke A:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_H \cdot r_1 + F_V \cdot r_2 = F \cdot d$$

$$r_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}$$

$$78,48 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,0 + 61,60 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2,0}{\pi} = 99,77 \cdot d$$

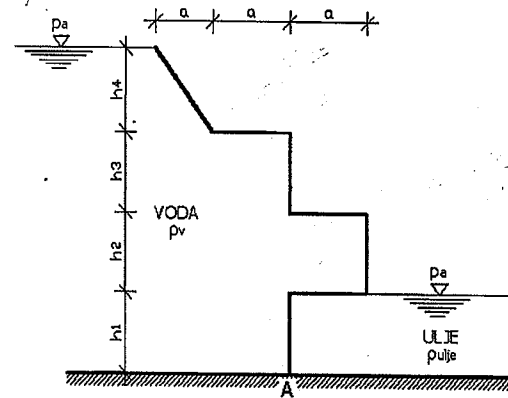
$$104,64 + 52,31 = 99,77 \cdot d$$

$$156,96 = 99,77 \cdot d \Rightarrow d = \frac{156,96}{99,77} \Rightarrow d = 1,57 \text{ m}$$

Zadatak 4.8.3.

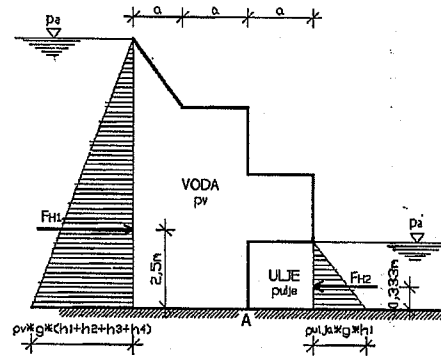
Na slici je prikazan zatvarač od čeličnog lima. Potrebno je nacrtati komponentne dijagrame horizontalnog i vertikalnog hidrostatičkog pritiska ili opterećenja, odrediti intenzitete horizontalne i vertikalne sile hidrostatičkog pritiska, ukupnu (rezultantnu) silu hidrostatičkog pritiska i njen smjer. U tački A odrediti vrijednost momenta savijanja usljed hidrostatičkog pritiska ili opterećenja. Prilikom proračuna zanemariti težinu čeličnog lima.

Zadato: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{ulja} = 840 \text{ kg/m}^3$; $a = 2,0 \text{ m}$; $h_1 = 1,0 \text{ m}$; $h_2 = 2,0 \text{ m}$; $h_3 = 2,0 \text{ m}$; $h_4 = 2,5 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



RJEŠENJE

Horizontalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska:



$$F_{H1} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

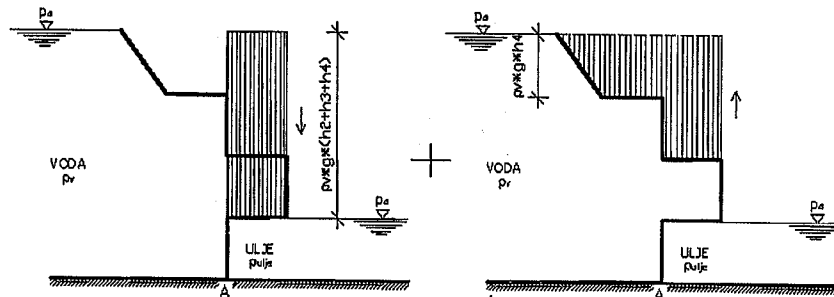
$$F_{H1} = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot (1,0 + 2,0 + 2,0 + 2,5) \cdot (1,0 + 2,0 + 2,0 + 2,5) = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 7,5 \cdot 7,5$$

$$F_{H1} = 275906,25 \text{ N/m} = 275,906 \text{ kN/m} \rightarrow$$

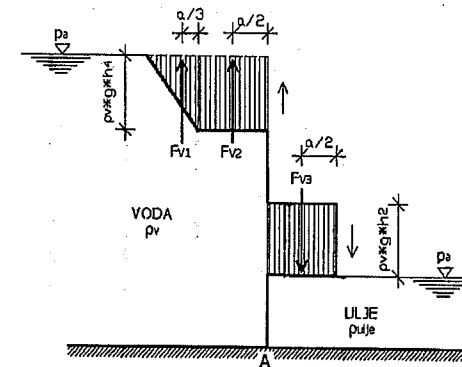
$$F_{H2} = \frac{1}{2} \rho_{ulje} \cdot g \cdot h_1 \cdot h_1 = \frac{1}{2} 840 \cdot 9,81 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 4120,2 \text{ N/m} = 4,120 \text{ kN/m} \leftarrow$$

$$F_H = F_{H1} - F_{H2} = 275,906 - 4,120 = 271,78 \text{ kN/m} \rightarrow$$

Vertikalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska:



Nakon sređivanja dijagrama vertikalne komponente sile hidrostatičkog pritiska, dobijamo slijedeći dijagram vertikalnog hidrostatičkog pritiska:



$$F_{V1} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot h_4 \cdot a = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \cdot 2,0 = 24525,0 \text{ N/m} = 24,525 \text{ kN/m} \uparrow$$

$$F_{V2} = \rho_v \cdot g \cdot h_4 \cdot a = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \cdot 2,0 = 49050,0 \text{ N/m} = 49,050 \text{ kN/m} \uparrow$$

$$F_{V3} = \rho_v \cdot g \cdot h_2 \cdot a = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,0 \cdot 2,0 = 39240,0 \text{ N/m} = 39,240 \text{ kN/m} \downarrow$$

$$F_V = F_{V1} + F_{V2} - F_{V3} = 24,525 + 49,050 - 39,240 = 34,33 \text{ kN/m} \uparrow$$

Rezultantna sila hidrostatičkog pritiska:

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{271,78^2 + 34,33^2} = 273,94 \text{ kN/m}$$

Smjer dejstva rezultantne sile hidrostatičkog pritiska:

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_V}{F_H} = \frac{34,33}{271,78} = 0,1263 \Rightarrow \alpha = 7,20^\circ$$

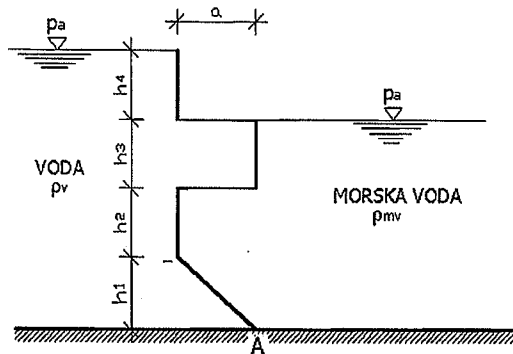
Momenat savijanja u tački A (uklještenje):

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow F_{H1} \cdot 2,5 - F_{H2} \cdot 0,333 + F_{V1} \left(a + \frac{1}{3} a \right) + F_{V2} \cdot \frac{a}{2} + F_{V3} \cdot \frac{a}{2} \\ M_A &= 275,906 \cdot 2,5 - 4,12 \cdot 0,333 + 24,525 \cdot 2,667 + 49,05 \cdot 1,0 + 39,24 \cdot 1,0 \\ M_A &= 842,09 \text{ kNm/m} \end{aligned}$$

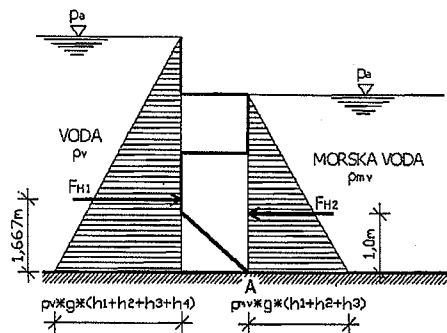
Zadatak 4.8.4.

Za sistem prema slici treba nacrtati komponentne dijagrame hidrostatičkog pritiska ili opterećenja, odrediti intenzitete sila hidrostatičkog pritiska, ukupnu (rezultantnu) silu hidrostatičkog pritiska i njen ugao na čelični lim. U tački A (uključeno) odrediti reakcije i moment savijanja usljed hidrostatičkog opterećenja. Pri proračunu zanemariti težinu čeličnog lima.

Zadato: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{mv} = 1035 \text{ kg/m}^3$; $a = 1,0 \text{ m}$; $h_1 = 1,0 \text{ m}$; $h_2 = 1,0 \text{ m}$; $h_3 = 1,0 \text{ m}$; $h_4 = 2,0 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

**RJEŠENJE**

Horizontalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska:



$$F_{H1} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

$$F_{H1} = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 (1,0 + 1,0 + 1,0 + 2,0) \cdot (1,0 + 1,0 + 1,0 + 2,0)$$

$$F_{H1} = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 5,0 \cdot 5,0 = 122625,0 \text{ N/m} = 122,625 \text{ kN/m} \rightarrow$$

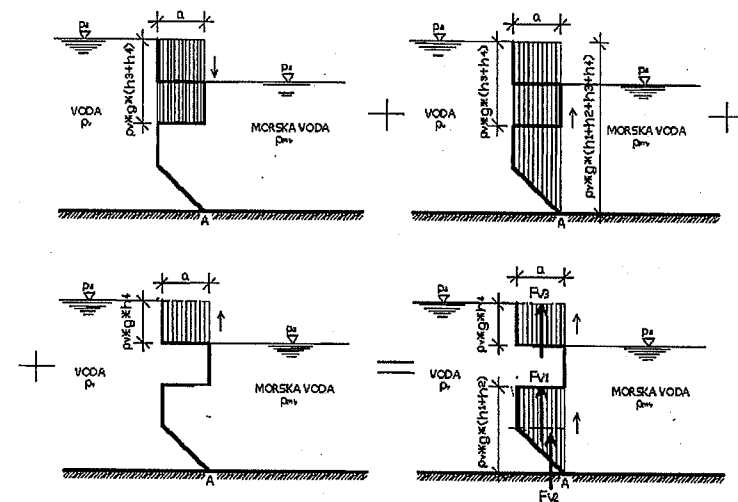
$$F_{H2} = \frac{1}{2} \rho_{mv} \cdot g \cdot (h_1 + h_2 + h_3) \cdot (h_1 + h_2 + h_3)$$

$$F_{H2} = \frac{1}{2} 1035 \cdot 9,81 (1,0 + 1,0 + 1,0) \cdot (1,0 + 1,0 + 1,0) = \frac{1}{2} 1035 \cdot 9,81 \cdot 3,0 \cdot 3,0$$

$$F_{H2} = 45690,08 \text{ N/m} = 45,69 \text{ kN/m} \leftarrow$$

$$F_H = F_{H1} - F_{H2} = 122,625 - 45,69 = 76,94 \text{ kN/m} \rightarrow$$

Vertikalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska – uticaj vode:

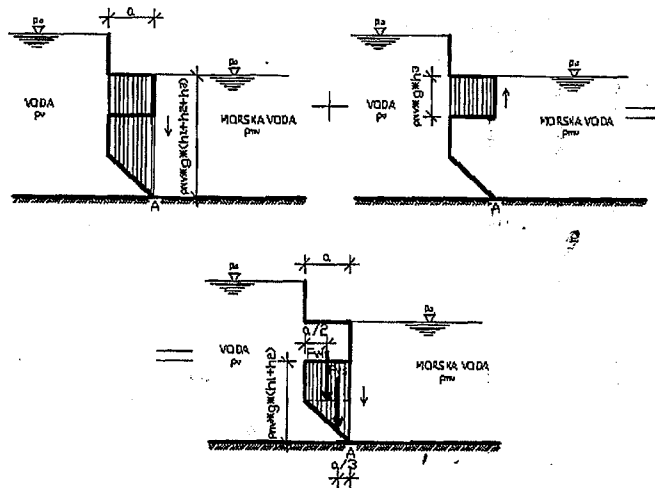


$$F_{V1} = \rho_v \cdot g \cdot h_2 \cdot a = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 9810,0 \text{ N/m} = 9,81 \text{ kN/m} \uparrow$$

$$F_{V2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot h_1 \cdot a = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 4905,0 \text{ N/m} = 4,91 \text{ kN/m} \uparrow$$

$$F_{V3} = \rho_v \cdot g \cdot h_4 \cdot a = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,0 \cdot 1,0 = 19620,0 \text{ N/m} = 19,62 \text{ kN/m} \uparrow$$

Vertikalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska – uticaj morske vode:



$$F_{V4} = \rho_{mv} \cdot g \cdot h_2 \cdot a = 1035 \cdot 9,81 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 10153,35 \text{ N/m} = 10,15 \text{ kN/m} \quad \downarrow$$

$$F_{V5} = \frac{1}{2} \rho_{mv} \cdot g \cdot h_1 \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 1035 \cdot 9,81 \cdot 1,0 \cdot 1,0 = 5076,67 \text{ N/m} = 5,07 \text{ kN/m} \quad \downarrow$$

$$F_V = F_{V1} + F_{V2} + F_{V3} - F_{V4} - F_{V5} = 9,81 + 4,91 + 19,62 - 10,15 - 5,07$$

$$F_V = 19,12 \text{ kN/m} \quad \uparrow$$

Rezultantna sila hidrostatičkog pritiska:

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{76,94^2 + 19,12^2} = 79,28 \text{ kN/m}$$

Ugao dejstva rezultantne sile hidrostatičkog pritiska:

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_V}{F_H} = \frac{19,12}{76,94} = 0,2485 \Rightarrow \alpha = 13,95^\circ$$

Momenat savijanja u tački A (uklještenje):

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow F_{H1} \cdot 1,667 - F_{H2} \cdot 1,0 + F_{V1} \cdot 0,5 + F_{V2} \cdot 0,333 + F_{V3} \cdot 0,5 - \\ &- F_{V4} \cdot 0,5 - F_{V5} \cdot 0,33 \\ M_A &= 122,625 \cdot 1,667 - 45,69 \cdot 1,0 + 9,81 \cdot 0,5 + 4,91 \cdot 0,333 + \\ &+ 19,62 \cdot 0,5 - 10,15 \cdot 0,5 - 5,07 \cdot 0,333 \\ M_A &= 168,31 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

Reakcije u uklještenju:

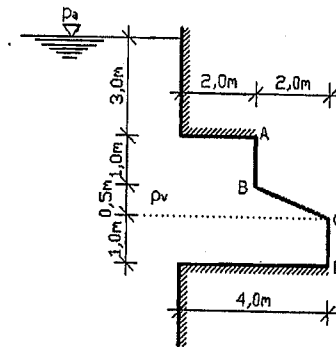
$$R_{AX} = F_H \Rightarrow R_{AX} = -76,94 \text{ kN/m} \quad \leftarrow$$

$$R_{AY} = F_V \Rightarrow R_{AY} = -19,12 \text{ kN/m} \quad \downarrow$$

Zadatak 4.8.5.

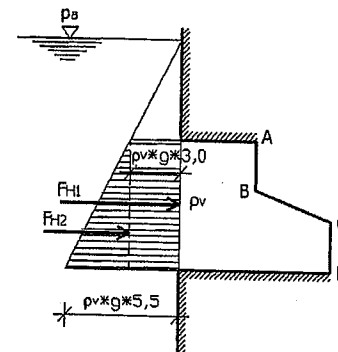
Na sistemu prema slici, nalazi se čelični lim širine $B=4,0$ m. Dužina čeličnog lima data je u tačkama A, B, C, D. Treba nacrtati komponentne dijagrame hidrostatičkog pritiska ili opterećenja, odrediti intenzitete sile hidrostatičkog pritiska na čelični lim, te odrediti rezultantnu silu hidrostatičkog pritiska i veličine hidrostatičkog pritiska u tačkama A, B, C, D. Pri proračunu zanemariti težinu čeličnog lima.

Zadato: $\rho_v=1000 \text{ kg/m}^3$; $g=9,81 \text{ m/s}^2$; $B=4,0$ m.



RJEŠENJE

Horizontalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska:

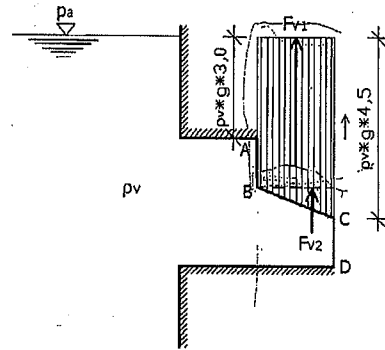


$$F_{H1} = \rho_v \cdot g \cdot 3,0 \cdot 2,5 \cdot B = 1000 \cdot 9,81 \cdot 3,0 \cdot 2,5 \cdot 4,0 = 294300 \text{ N} = 294,30 \text{ kN} \rightarrow$$

$$F_{H2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot B = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 4,0 = 122625 \text{ N} = 122,62 \text{ kN}$$

$$F_H = F_{H1} + F_{H2} = 294,30 + 122,62 = 416,92 \text{ kN} \rightarrow$$

Vertikalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska:



$$F_{V1} = \rho_v \cdot g \cdot 4,0 \cdot 2,0 \cdot B = 1000 \cdot 9,81 \cdot 4,0 \cdot 2,0 \cdot 4,0 = 313920 \text{ N} = 313,92 \text{ kN} \uparrow$$

$$F_{V2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot 0,5 \cdot 2,0 \cdot B = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot 2,0 \cdot 4,0 = 19620 \text{ N} = 19,62 \text{ kN} \uparrow$$

$$F_V = F_{V1} + F_{V2} = 313,92 + 19,62 = 333,54 \text{ kN} \uparrow$$

Rezultantna sila hidrostatičkog pritiska:

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{416,92^2 + 333,54^2} = 533,92 \text{ kN}$$

Veličine hidrostatičkog pritiska u tačkama A, B, C, D:

$$p_A = \rho_v \cdot g \cdot 3,0 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 3,0 = 29430 \text{ N/m}^2 = 29,43 \text{ kN/m}^2$$

$$p_B = \rho_v \cdot g \cdot 4,0 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 4,0 = 39240 \text{ N/m}^2 = 39,24 \text{ kN/m}^2$$

$$p_C = \rho_v \cdot g \cdot 4,5 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 4,5 = 44145 \text{ N/m}^2 = 44,14 \text{ kN/m}^2$$

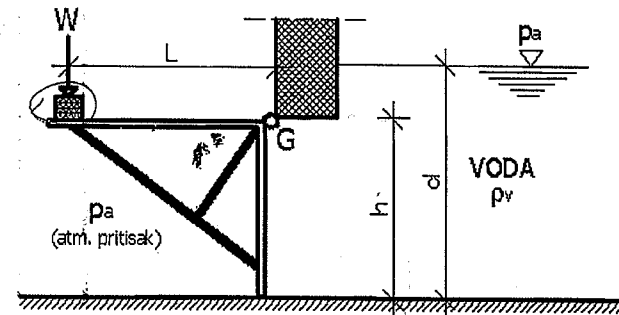
$$p_D = \rho_v \cdot g \cdot 5,5 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 5,5 = 53955 \text{ N/m}^2 = 53,95 \text{ kN/m}^2$$

Zadatak 4.8.6.

Težinom W opterećena je klapna, prema slici. Klapna ima visinu h i širinu b . Odrediti koja težina W je potrebna tako da se klapna otvara samo oko tačke G , usljed hidrostatičkog pritiska.

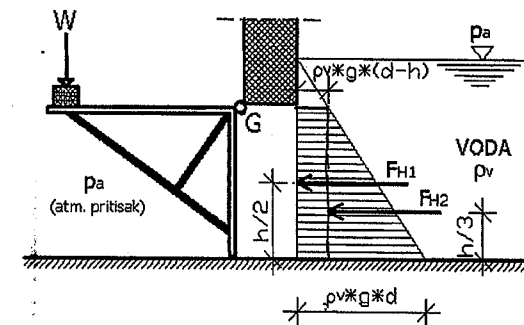
Težinu klapne zanemariti pri proračunu.

Zadato: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $h = 5,0 \text{ m}$; $b = 4,0 \text{ m}$; $L = 6,0 \text{ m}$; $d = 6,0 \text{ m}$.



RJEŠENJE

Hidrostatički pritisak na klapnu:



$$F_{H1} = \rho_v \cdot g \cdot (d - h) \cdot h \cdot b = 1000 \cdot 9,81 \cdot (6,0 - 5,0) \cdot 5,0 \cdot 4,0$$

$$F_{H1} = 196200 \text{ N} = 196,20 \text{ kN}$$

$$F_{H2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot (d - (d - h)) \cdot h \cdot b = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot (6,0 - (6,0 - 5,0)) \cdot 5,0 \cdot 4,0$$

$$F_{H2} = 490500 \text{ N} = 490,50 \text{ kN}$$

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow W \cdot L - F_{H1} \cdot \frac{h}{2} - F_{H2} \cdot \frac{2}{3}h$$

$$W \cdot L = F_{H1} \cdot \frac{h}{2} + F_{H2} \cdot \frac{2}{3}h \Rightarrow 6,0W = 196,20 \cdot \frac{5,0}{2} + 490,50 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,0$$

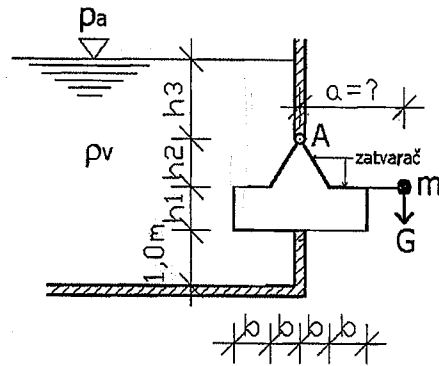
$$6,0W = 490,50 + 1635,00 \Rightarrow 6,0W = 2125,50$$

$$W = \frac{2125,50}{6,0} \Rightarrow W = 354,25 \text{ kN}$$

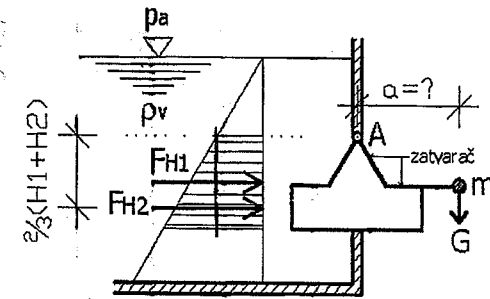
Zadatak 4.8.7.

Na slici je prikazan zatvarač datog oblika i jedinične širine koji se može okretati oko tačke A. Potrebno je odrediti masu kugle (m) i njen krak odnosno rastojanje od tačke A, tako da kugla onemogući otvaranje zatvarača. Nacrtati dijagrame vertikalne i horizontalne komponente hidrostatičkog pritiska po konturi zatvarača.

Zadato: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $G = 30 \text{ kN}$; $h_1 = 1,0 \text{ m}$; $h_2 = 0,8 \text{ m}$; $h_3 = 1,5 \text{ m}$; $b = 0,5 \text{ m}$.

**RJEŠENJE**

Horizontalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska:

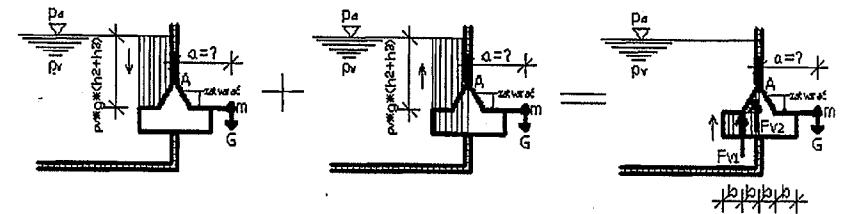


$$F_{H1} = \rho_v \cdot g \cdot h_3 \cdot (h_1 + h_2) = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,5 \cdot (1,0 + 0,8) = 26487 \text{ N/m}' = 26,48 \text{ kN/m}'$$

$$F_{H2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot (h_1 + h_2) \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot (1,0 + 0,8) \cdot (1,0 + 0,8)$$

$$F_{H2} = 15892,20 \text{ N/m}' = 15,89 \text{ kN/m}'$$

Vertikalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska:



$$F_{V1} = \rho_v \cdot g \cdot h_1 \cdot 2b = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,0 \cdot 2 \cdot 0,5 = 9810,0 \text{ N/m}' = 9,81 \text{ kN/m}' \uparrow$$

$$F_{V2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot h_2 \cdot b = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,8 \cdot 0,5 = 1962,0 \text{ N/m}' = 1,96 \text{ kN/m}' \uparrow$$

Određivanje rastojanja kugle mase m od tačke A:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow G \cdot a + F_{V1} \cdot b + F_{V2} \cdot \frac{1}{3}b - F_{H1} \cdot \frac{1}{2}(h_1 + h_2) - F_{H2} \cdot \frac{2}{3}(h_1 + h_2)$$

$$30 \cdot a + 9,81 \cdot 0,5 + 1,96 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 - 26,48 \cdot \frac{1}{2} (1,0 + 0,8) - 15,89 \cdot \frac{2}{3} (1,0 + 0,8) = 0$$

$$30 \cdot a + 4,91 + 0,33 - 23,83 - 19,07 = 0$$

$$30 \cdot a - 37,66 = 0$$

$$30 \cdot a = 37,66$$

$$a = \frac{37,66}{30} \Rightarrow a = 1,25 \text{ m}$$

$$G = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{G}{g} \Rightarrow m = \frac{30 \cdot 10^3}{9,81} \Rightarrow m = 3058,11 \text{ kg}$$

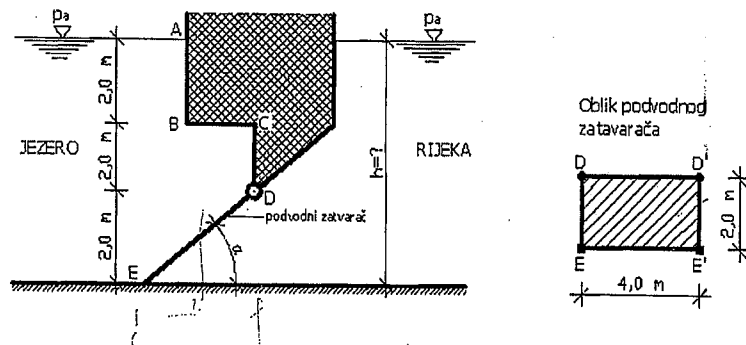
Potrebna masa kugle iznosi $m=3058,11$ kg, dok rastojanje kugle od tačke A iznosi $a=1,25$ m.

Zadatak 4.8.8.

Između jezera i rijeke nalazi se betonska konstrukcija kako je prikazano na slici. Kada je u rijeci dostignut nivo vode h , otvara se podvodni zatvarač DE koji se nalazi na struji riječne vode u jezero koje prihvata nailazak poplavnog talasa rijekom.

- Izračunati i grafički prikazati veličine hidrostatičkog pritiska u tačkama A, B, C, D, E.
- Odrediti dubinu vode h , na struji rijeke, potrebnu za otvaranje podvodnog zatvarača. Zatvarač se može okretati u tački D. Težina zatvarača iznosi $G=200$ kN. Tekstualno obrazložiti dobijeni rezultat.

Zadato: $\rho_v=1000$ kg/m³; $g=9,81$ m/s²; $G=200$ kN; $\alpha=45^\circ$.



RJEŠENJE

$$a) p = \rho_v \cdot g \cdot h$$

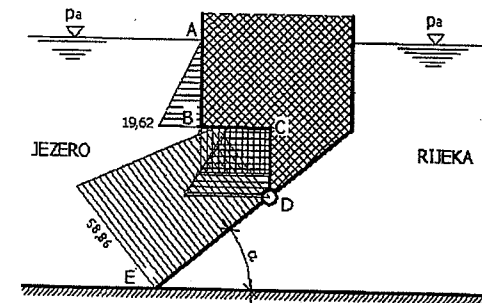
$$p_A = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,0 = 0,0 \text{ N/m}^2 = 0,0 \text{ kN/m}^2$$

$$p_B = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,0 = 19620,0 \text{ N/m}^2 = 19,62 \text{ kN/m}^2$$

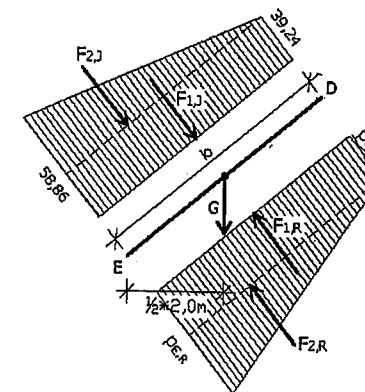
$$p_C = p_B = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,0 = 19620,0 \text{ N/m}^2 = 19,62 \text{ kN/m}^2$$

$$p_D = 1000 \cdot 9,81 \cdot 4,0 = 39240,0 \text{ N/m}^2 = 39,24 \text{ kN/m}^2$$

$$p_E = 1000 \cdot 9,81 \cdot 6,0 = 58860,0 \text{ N/m}^2 = 58,86 \text{ kN/m}^2$$



- Dijagram hidrostatičkog pritiska na podvodni zatvarač:



Površina podvodnog zatvarača: $A = a \cdot b$

$$a = 4,0 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{2,0^2 + 2,0^2} = 2,83 \text{ m}$$

$$A = 4,0 \cdot 2,83 = 11,32 \text{ m}^2$$

Hidrostatički pritisak od rijeke na podvodni zatvarač:

$$p_{D,R} = 1000 \cdot 9,81 \cdot (h - 2,0) = 9810 \cdot (h - 2,0) = 9,81 \cdot (h - 2,0) \quad [kN/m^2]$$

$$p_{E,R} = 1000 \cdot 9,81 \cdot h = 9810 \cdot h = 9,81 \cdot h \quad [kN/m^2]$$

Intenziteti sila hidrostatičkog pritiska:

$$F_{i,J} = p_{i,J} \cdot A$$

Jezero

$$F_{1,J} = 39,24 \cdot 2,83 \cdot 4,0 = 444,19 kN$$

$$F_{2,J} = \frac{1}{2} (58,86 - 39,24) \cdot 2,83 \cdot 4,0 = 111,05 kN$$

Rijeka

$$F_{1,R} = 9,81 \cdot (h - 2,0) \cdot 2,83 \cdot 4,0 = 111,05 \cdot (h - 2,0) \quad [kN]$$

$$F_{2,R} = \frac{1}{2} (9,81 \cdot h - 9,81 \cdot (h - 2,0)) \cdot 2,83 \cdot 4,0 = 5,66 \cdot (9,81h - 9,81 \cdot (h - 2,0))$$

$$F_{2,R} = 5,66 \cdot (9,81 \cdot h - 9,81 \cdot h + 19,62) = 111,05 kN$$

Određivanje potrebne dubine vode h na strani rijeke:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow G \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,0 + F_{1,J} \cdot \frac{1}{2} \cdot b + F_{2,J} \cdot \frac{2}{3} \cdot b - F_{1,R} \cdot \frac{1}{2} \cdot b - F_{2,R} \cdot \frac{2}{3} \cdot b$$

$$200 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,0 + 444,19 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,83 + 111,05 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,83 - 111,05 \cdot (h - 2,0) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,83 -$$

$$- 111,05 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,83 = 0$$

$$200 + 628,53 - 157,14 \cdot h + 314,27 = 0$$

$$- 157,14 \cdot h + 1142,80 = 0$$

$$157,14 \cdot h - 1142,80 = 0$$

$$157,14 \cdot h = 1142,80$$

$$h = \frac{1142,80}{157,14}$$

$$h = 7,27 m$$

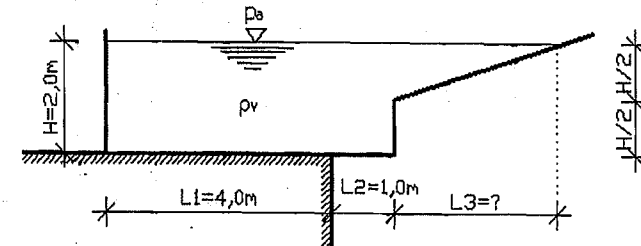
Tekstualno obrazloženje:

Podvodni zatvarač će se otvoriti kada dubina vode u rijeci dostigne nivo od $h = 7,27 m$.

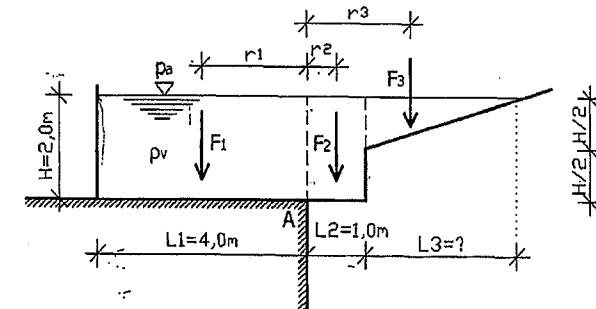
Zadatak 4.8.9.

Plastični bazen širine $b = 3,0 m$ napunjen je vodom dubine $H = 2,0 m$ i postavljen preko ruba armirano betonske ravne ploče, prema slici. Potrebno je odrediti dužinu bazena L_3 da se bazen ne prevrne preko ruba ploče. Pri proračunu zanemariti težinu plastičnog bazena.

Zadato: $\rho_v = 1000 kg/m^3$; $g = 9,81 m/s^2$; $H = 2,0 m$.



RJEŠENJE



Komponentalne horizontalne sile hidrostatičkog pritiska na zidove bazena su istog intenziteta, ali suprotnog smjera, tako da se poništavaju. Vertikalne komponente sila hidrostatičkog pritiska označene su kao sile F_1 , F_2 i F_3 .

$$r_1 = \frac{4,0}{2} = 2,0 m \quad r_2 = \frac{1,0}{2} = 0,5 m \quad r_3 = \frac{1}{3} L_3 + 1,0$$

$$F_1 = \rho_v \cdot g \cdot L_1 \cdot H \cdot b = 1000 \cdot 9,81 \cdot 4,0 \cdot 2,0 \cdot 3,0 = 235440 N = 235,44 kN$$

$$F_2 = \rho_v \cdot g \cdot L_2 \cdot H \cdot b = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,0 \cdot 2,0 \cdot 3,0 = 58860 N = 58,86 kN$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot L_3 \cdot \frac{1}{2} H \cdot b = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot L_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 3,0 = 14715 \cdot L_3 = 14,715 \cdot L_3$$

Dužinu bazena L_3 odredit ćemo ako postavimo uslov da je $\sum M_A = 0$:

$$\sum M_A \Rightarrow F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2 + F_3 \cdot r_3$$

$$235,44 \cdot 2,0 = 58,86 \cdot 0,5 + 14,715 \cdot L_3 \cdot \left(\frac{1}{3}L_3 + 1,0\right)$$

$$470,88 = 29,43 + 4,904 \cdot L_3^2 + 14,715 \cdot L_3$$

$$4,904 \cdot L_3^2 + 14,715 L_3 + 29,43 - 470,88 = 0$$

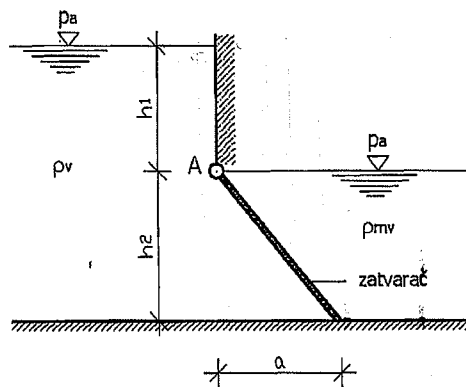
$$4,904 \cdot L_3^2 + 14,715 L_3 - 441,45 = 0$$

$$L_3 \cong 8,11 \text{ m}$$

Zadatak 4.8.10.

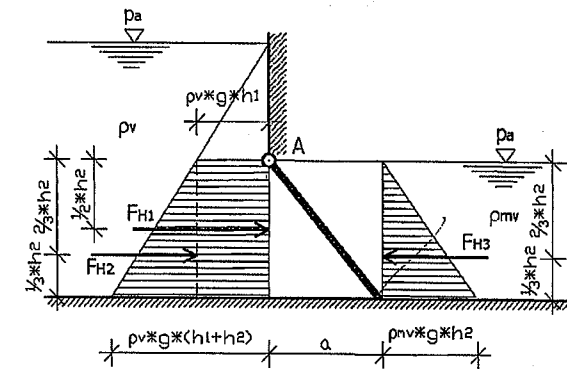
Odrediti najmanju potrebnu težinu (G) zatvarača, jedinične širine, koji je okretljiv oko tačke A, tako da bi ostao zatvoren kako je prikazano na slici. Izračunati intenzitet horizontalne i vertikalne sile hidrostatičkog pritiska na zatvarač.

Zadato: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{mv} = 1030 \text{ kg/m}^3$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $h_1 = 2,0 \text{ m}$; $h_2 = 2,5 \text{ m}$; $a = 1,5 \text{ m}$.



RJEŠENJE

Horizontalna komponenta hidrostatičkog pritiska:



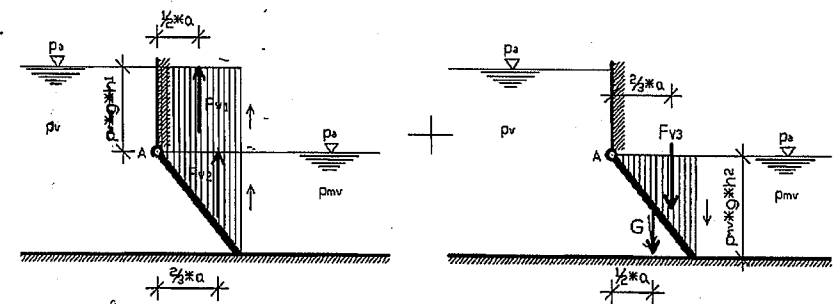
$$F_{H1} = \rho_v \cdot g \cdot h_1 \cdot h_2 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,0 \cdot 2,5 = 49050 \text{ N/m}' = 49,05 \text{ kN/m}' \rightarrow$$

$$F_{H2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot h_2 \cdot h_2 = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \cdot 2,5 = 30656,25 \text{ N/m}' = 30,65 \text{ kN/m}'$$

$$F_{H3} = \frac{1}{2} \rho_{mv} \cdot g \cdot h_2 \cdot h_2 = \frac{1}{2} 1030 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \cdot 2,5 = 31575,94 \text{ N/m}' = 31,57 \text{ kN/m}'$$

$$F_H = F_{H1} + F_{H2} - F_{H3} = 49,05 + 30,65 - 31,57 = 48,13 \text{ kN/m}' \rightarrow$$

Vertikalna komponenta sile hidrostatičkog pritiska:



$$F_{V1} = \rho_v \cdot g \cdot h_1 \cdot a = 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,0 \cdot 1,5 = 29430 \text{ N/m}' = 29,43 \text{ kN/m}' \uparrow$$

$$F_{V2} = \frac{1}{2} \rho_v \cdot g \cdot h_2 \cdot a = \frac{1}{2} 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \cdot 1,5 = 18393,75 \text{ kN/m} = 18,39 \text{ kN/m} \uparrow$$

$$F_{V3} = \frac{1}{2} \rho_{mv} \cdot g \cdot h_2 \cdot a = \frac{1}{2} 1030 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \cdot 1,5 = 18945,56 \text{ N/m} = 18,94 \text{ kN/m} \downarrow$$

$$F_V = F_{V1} + F_{V2} - F_{V3} = 29,43 + 18,39 - 18,94 = 28,88 \text{ kN/m} \uparrow$$

Određivanje najmanje potrebne težine zatvarača:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow G \cdot \frac{1}{2} a - F_{H1} \cdot \frac{1}{2} h_2 - F_{H2} \cdot \frac{2}{3} h_2 + F_{H3} \cdot \frac{2}{3} h_2 - \\ - F_{V1} \cdot \frac{1}{2} a - F_{V2} \cdot \frac{2}{3} a + F_{V3} \cdot \frac{2}{3} a = 0$$

$$0,75G - 49,05 \cdot 1,25 - 30,65 \cdot 1,667 + 31,57 \cdot 1,667 - 29,43 \cdot 0,75 - \\ - 18,39 \cdot 1,0 + 18,94 \cdot 1,0 = 0$$

$$0,75G = 81,30 \Rightarrow G = \frac{81,30}{0,75} \Rightarrow G = 108,40 \text{ kN/m}$$

5. KINEMATIKA FLUIDA

5.1. Uvod

U mehanici fluida postoji podjela na hidrostatiku, kinematiku i dinamiku fluida. U hidrostatiki proučavamo ponašanje tečnosti u stanju mirovanja, dok u kinematici proučavamo ponašanje tečnosti u kretanju bez analiziranja uzroka tog kretanja. Naime, kinematika tečnosti bazira se na kretanju malog djelića tečnosti i to kretanje počinje izučavanjem promjene oblika promatranog djelića tečnosti, jer djelić tečnosti, za razliku od čvrstih materija, može u toku vremenskog perioda mijenjati i svoj položaj i svoj oblik.

Kinematika fluida se bavi proučavanjem kinematskih i geometrijskih osobina strujanja i njen značaj je u bitnoj činjenici da je trenutno riješen ograničen broj strujnih problema za realne fluide (o realnim i idealnim fluidima će biti riječi u narednom poglavlju).

U osnovne kinematske veličine spadaju put i vrijeme, dok je cilj kinematike određivanje polja brzina (odnos pređenog puta prema promatranom vremenu) i polja ubrzanja (odnos brzine kretanja promatranog djelića tečnosti prema datom vremenskom intervalu).

Pod pojmom fluida podrazumijeva se neprekidna sredina koja je pokretna i deformabilna, a činjenica je da se i pri veoma velikim deformacijama koje postoje u jednom strujnom polju, neprekidnost fluida zadržava. Tako, umjesto deformacija analiziramo brzine deformacija koje imaju vezu sa naponskim stanjem. Za jedan fluid u stanju kretanja trebamo odrediti brzinu kretanja u prostoru, zatim pritisak i gustinu fluida.

Jednostavnije rečeno, u kinematici vrijedi pravilo da svaka čestica fluida zauzima samo jednu tačku prostora. Ova tvrdnja proizilazi iz hipoteze kontinuuma. Važan pojam je i materijalna zapremina (V_M) koja predstavlja dio prostora ispunjen fluidom koji se u toku kretanja stalno sastoji od istih čestica fluida. Materijalna zapremina u toku kretanja mijenja svoj položaj, veličinu i oblik, što dovodi do zaključka da za opisivanje kretanja materijalne zapremine, moramo opisati kretanje svake njegove čestice.

U kinematici, postoje dva načina analiziranja kretanja fluida, i to Lagrangeov i Eulerov pristup. Općenito uzevši, Lagrangeov pristup se zasniva na tome da za svaki fluidni djelić odredimo njegovu putanju, brzinu i ubrzanje, dok Euler-ov pristup se zasniva na praćenju svih osobina fluidnog djelića zajedno sa brzinom i ubrzanjem u jednoj nepokretnoj tački polja. Bitno je znati da se polja fizikalnih osobina izražavaju prostornim koordinatama i odnose se na čestice fluida koje se u datom promatranom trenutku nalaze u promatranim tačkama prostora.

5.2. Vrste strujanja fluida

Na pojavu strujanja fluida utiču sile koje na njih djeluju, a koje mogu biti:

- 1) - zapremske sile kao što je sile teže i centrifugalna sila (sila inercije),

- 2) površinske sile koje nastaju usljed razlike pritiska u tačkama fluida, kao što su sile pritiska i adhezijske sile,
- 3) elastične sile koje se pojavljuju usljed kompresibilnosti fluida i javljaju se uglavnom kod gasova,
- 4) sile viskoznosti koje nastaju zbog unutarnjeg trenja između čestica fluida.

Posebno je važno razlikovati određene vrste strujanja fluida, a to su:

- 1) protjecanje koje predstavlja strujanje fluida između stijenki cijevi, kanala i slično, gdje imamo protok fluida i kretanje energije fluidom,
- 2) opticanje koje predstavlja strujanje fluida oko čvrstog tijela koje se nalazi uronjeno u struji vode, a to predstavlja kretanje čvrstih tijela kroz fluid. Najbolji primjer za to su brodovi, podmornice i slično. Takođe, u pojam opticanja ubrajamo i strujanje nekog fluida oko čvrstog tijela koje se nalazi u struji vode.

U hidrotehničkoj praksi razlikujemo dvije osnovne vrste strujanja fluida, i to stacionarno ili ustaljeno strujanje i nestacionarno ili neustaljeno strujanje.

Ukoliko sve fizičke veličine čestica fluida u svakoj čvrstoj tački prostora kojom taj fluid struji, su takve da kada dođu u takvu tačku, su konstantne ili nepromjenjive, što znači da ne zavise od vremena, i ako su jednake fizičkim veličinama svojih prethodnih čestica koje su već bile u toj promatranoj tački, onda kažemo da je strujanje **stacionarno** ili **ustaljeno**. To znači da je brzina svake čestice fluida odnosno elementarnog djelića fluida kada dođe u neku tačku $A(x_A, y_A, z_A)$ jednaka brzini v_A one čestice koju zamjenjuje u toj tački A , odnosno:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A(x_A, y_A, z_A) = \text{const.} \quad (5.1)$$

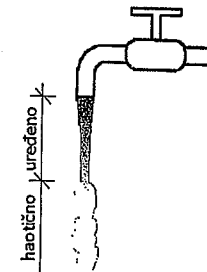
Ista osobina važi i za temperaturu i pritisak, odnosno stacionarnost (ustaljenost) označava nepromjenjivost u tačkama prostora u kome struji određeni fluid.

Nestacionarno ili **neustaljeno** strujanje predstavlja takvo strujanje gdje se fizičke veličine koje dođu u određenu neku promatranu tačku A razlikuju od fizičkih veličina čestica koje one zamjenjuju u toj tački u nekom vremenskom intervalu. U slučaju nestacionarnog ili neustaljenog strujanje, za brzinu strujanja, možemo napisati slijedeći izraz:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A(x_A, y_A, z_A) \neq \text{const.} \quad (5.2)$$

Poznato je da tečnosti mogu da struje u tzv. uređenom obliku ili u tzv. haotičnom obliku, a najbolji primjer za to je tečenje vode iz slavine. Naime, u slučaju kada slavinu vode malo otvorimo onda pri izlazu iz slavine voda teče ili struji potpuno uređeno. Međutim, niže od slavine voda već počinje da se kreće

haotično (slika 5.1). Iz iskustva možemo zaključiti da do haotičnog strujanja fluida (prvenstveno tečnosti) dolazi pri većim brzinama strujanja tog fluida.



Slika 5.1 Uređeno i haotično strujanje vode

Fenomen strujanja tečnosti izučavao je O. Reynolds. Reynolds je u tok fluida upuštao iz rezervoara drugi fluid koji je bio obojen. U svojim eksperimentima mijenjao je brzine strujanja glavnog (neobojenog) fluida, a takođe eksperimente je vršio primjenjujući i različite prečnike cijevi u kojima je strujao fluid. Na osnovu znatnog broja eksperimenata, Reynolds je došao do zaključka da promjena vrste odnosno režima strujanja zavisi od vrste tog fluida ili bolje rečeno od viskoziteta fluida kao i od brzine strujanja fluida i od prečnika cijevi kroz koji se fluid kreće. Vrstu tzv. uređenog strujanja Reynolds je nazvao **laminarnim strujanjem**, dok je tzv. haotično strujanje nazvao **turbulentnim strujanjem**. Svojim eksperimentima Reynolds je pokazao da povećanjem brzine fluida u cijevi određenog prečnika, dolazi do trenutka kada laminarno strujanje prelazi u turbulentno. Značajan doprinos Reynolds-a je upravo u tome što je utvrdio kriterij pri kojem dolazi do prelaska laminarnog u turbulentno strujanje, te je taj kriterij nazvan po njemu i naziva se Reynoldsov broj (R_e). Reynoldsov broj se definiše na osnovu slijedećeg izraza:

$$R_e = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad (5.3)$$

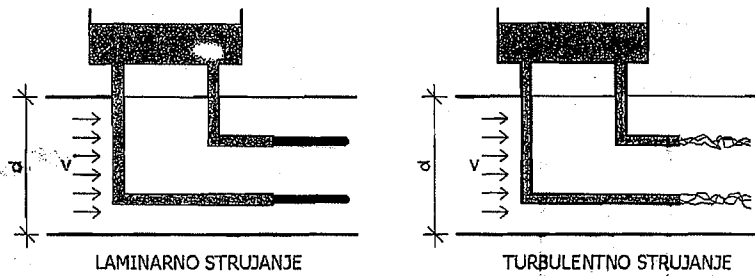
gdje je;

v – brzina strujanja fluida,

d – prečnik cijevi,

ν – kinematski koeficijent viskoznosti.

Reynoldsov broj je bezdimenzionalan, dok njegovo fizičko značenje možemo predstaviti odnosom inercijalnih i viskoznih sila u promatranom fluidu.



Slika 5.2 Reynoldsov eksperiment
(1-rezervoara sa obojenim fluidom; 2-strujna cijev)

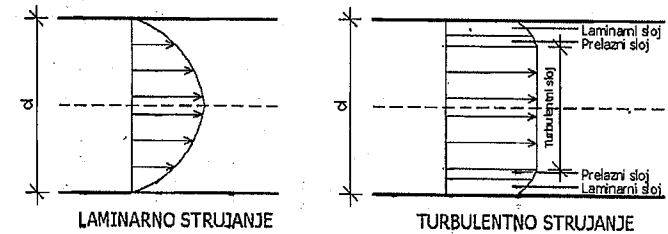
U svojim eksperimentima Reynolds je došao do zaključka da promjena vrste ili režima strujanja nastaje pri određenoj veličini Reynoldsovog broja. Na tu promjenu ne utiče vrsta fluida, prečnik cijevi u kojem on struji kao ni brzina strujanja. Laminarno ili tzv. uređeno strujanje postoji uvijek kada je $Re < 2320$, dok turbulentno ili tzv. haotično strujanje nastaje uvijek kada je Reynoldsov broj veći od 10000 ($Re > 10000$). Ukoliko lagano povećavamo brzinu strujanja fluida preko vrijednosti 2320, onda možemo održati laminarno strujanje koje će biti nestabilno i koje vrlo lako može preći u turbulentno ili haotično strujanje. Takođe, ukoliko smanjujemo veličinu Reynoldsovog broja ispod 10000, onda i dalje možemo imati turbulentno strujanje. To znači da područje vrijednosti Reynoldsovog broja između 2320 i 10000 nazivamo tzv. prelazni oblik ili režim strujanja fluida. U prelaznom obliku strujanja može postojati i laminarno i turbulentno strujanje. Na osnovu naprijed navedenog, mogu se napisati slijedeći izrazi za vrste strujanja u funkciji vrijednosti Reynoldsovog broja:

$$Re \leq 2320 \quad \text{Laminarno strujanje} \quad (5.4)$$

$$2320 \leq Re \leq 10000 \quad \text{Prelazni oblik strujanja} \quad (5.5)$$

$$Re \geq 10000 \quad \text{Turbulentno strujanje} \quad (5.6)$$

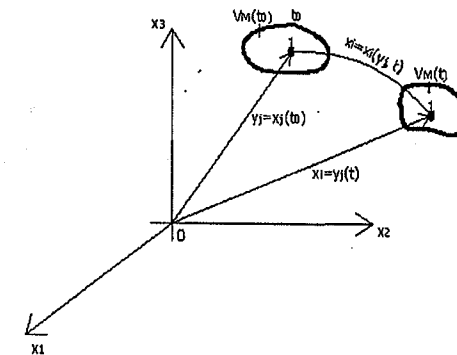
Navedeni oblici ili režimi strujanja fluida znatno utiču na oblik profila brzine fluida u cijevi, što je prikazano na slici 5.3. Naime, kod laminarnog strujanja fluida, profil dijagrama brzine je oblika parabole, dok kod turbulentnog strujanja fluida postoji ravnomjerniji oblik rasporeda brzine strujanja u datom profilu cijevi. Međutim, kod turbulentnog strujanja fluida u cjevovodu uz zidove (stijenke) cijevi postoji laminarno strujanje dok u osi (središte) cijevi postoji turbulentno strujanje fluida. Između zidova cijevi (laminarno strujanje) i ose odnosno središta cijevi (turbulentno strujanje) postoji oblast u kome je tzv. prelazni oblik ili režim strujanja fluida.



Slika 5.3 Dijagram brzine fluida u cijevi za slučaj laminarnog i turbulentnog strujanja

5.3. Lagrangeov pristup opisivanja kretanja fluida

Položaji čestica fluida i položaji tačaka prostora opisuju se radijus vektorom \vec{r} . U koordinatnom sistemu položaj čestice fluida koja se kreće promjenjiv je vremenom, a položaj tačke prostora je konstantan u funkciji vremena. Ovo znači da komponente x_i radijus vektora odnosno vektora položaja su funkcija vremena. Kretanje čestice fluida dato je promjenom njenog vektora položaja u funkciji vremena, odnosno vektor položaja dat je u obliku $x_i = x_i(t)$.



Slika 5.4 Kretanje čestice fluida

Sa slike 5.4 može se zaključiti da su i brzine čestice (elementarnog djelića) fluida u funkciji vremenske promjene vektora položaja odnosno:

$$v_i = \dot{x}_i(t) \quad (5.7)$$

Ubrzanje čestice odnosno elementarnog djelića tečnosti je u funkciji vremenske promjena brzine odnosno:

$$a_i = \dot{v}_i(t) \quad (5.8)$$

Materijalna zapremina se sastoji od beskonačno velikog broja elementarnih djelića fluida u nekom početnom trenutku vremena t_0 , pa je $V_M(t_0)$. U jednoj tački prostora nalazi samo jedna čestica odnosno elementarni djelić fluida i one se razlikuju po svom položaju u kom se nalaze u početnom trenutku. Početni položaj elementarnog djelića fluida možemo opisati koordinatama tog početnog položaja, u slijedećem obliku:

$$y_j = x_j(t_0) \quad (5.9)$$

Koordinate date izrazom 5.9 nazivamo materijalnim ili Lagrangovim koordinatama i one se zavise od vremena.

Sa slike 5.4 vidimo da se elementarni djelić fluida koji se kreće, u nekom promatranom vremenskom intervalu t , dolazi u novi položaj. Pošto ovdje govorimo o materijalnoj zapremini, onda će se u tom promatranom vremenu t nalaziti elementarni djelići fluida koji su se u materijalnoj zapremini nalazili i u početnom vremenu t_0 . To znači, da tačka I (slika 5.4) se nalazi u početnom vremenu na položaju koji je definisan koordinatama y_j . U promatranom vremenu t ($t > t_0$) tačka I nalaziti će se u položaju definisanim koordinatama x_i . Veličine koordinata x_i zavise od vremena i od tačke u početnom vremenu.

U Lagrangeovom opisivanju kretanja fluida, možemo opisati i neke druge osobine elementarnog djelića fluida, a na osnovu koordinata i vremena. Uzmimo da sa Ω obilježimo jednu fizičku osobinu fluida kao što je gustina, na primjer, onda imamo slijedeći izraz:

$$\Omega = \Omega^L(y_j, t) \quad (5.10)$$

Izraz 5.10 opisuje promjenu fizičke osobine fluida u funkciji vremena odnosno promjenu fizičke osobine Ω elementarnog djelića y_j . Indeks L iznad Ω u izrazu 5.4 označava da je fizička osobina opisana Lagrangeovim koordinatama.

5.4. Eulerov pristup opisivanja kretanja fluida

Eulerov pristup opisivanja strujanja fluida bazira se na poljima fizičkih veličina i ovaj pristup se danas uglavnom i koristi u mehanici fluida. Polje fizičke osobine fluida koje je izraženo Eulerovim prostornim koordinatama dobit ćemo ukoliko svakoj tački prostora u svakom trenutku vremena pridružimo fizičku osobinu onog elementarnog djelića fluida koji se u promatranom trenutku nalazi u promatranim tačkama prostora. Eulerove prostorne koordinate možemo napisati slijedećim izrazom:

$$\Omega = \Omega^E(x_i, t) \quad (5.11)$$

Za polje koje nije funkcija vremena kaže se da je stacionarno polje, a polje koja je funkcija vremena je nestacionarno.

Odnos između Eulerovog i Lagrangeovog pristupa određene fizičke osobine pri strujanju određenog fluida, karakteriše slijedeća jednačina kretanja:

$$y_j = y_j(x_i, t) \quad (5.12)$$

Izraz 5.12 daje položaj onog elementarnog djelića fluida u početnom vremenu (trenutak t_0) koji se u vremenu odnosno trenutku t nalazi na položaju koji je određen prostornim koordinatama x_i . Kada izraz 5.12 uvrstimo u Lagrangeov izraz fizičke osobine Ω , dobit ćemo Eulerov izraz za polje Ω , odnosno:

$$\Omega = \Omega^L(y_j, t) = \Omega^E(y_j(x_i, t), t) = \Omega^E(x_i, t) \quad (5.13)$$

Na osnovu prethodnog izraza jasno je da u tačkama prostora u kojima nema elementarnih djelića fluida, polje fizičke veličine nije ni definisano, a to znači da fizičke osobine predstavljaju elementarni djelići fluida iako su fizičke osobine prikazane prostornim koordinatama.

5.5. Trajektorije, strujnice, strujne površi, strujno vlakno i strujna cijev

Trajektorija predstavlja prostornu krivu liniju koja svojim kretanjem opisuje strujanje (kretanje) jedne čestice (elementarnog djelića) fluida. Pošto se u Eulerovom opisivanju strujanja fluida polazi od tzv. polja brzine, onda do izraza za jednačinu trajektorija dolazimo ako postavimo definiciju brzine čestica kontinuumu. Naime, ukoliko je usmjereni infinitezimalni elemenat puta kojeg jedna čestica kontinuumu pređe krećući se po svojoj trajektoriji za neko infinitezimalno vrijeme dt , onda za ovakav usmjereni element luka trajektorije dobija se izraz koji potiče iz definicije brzine:

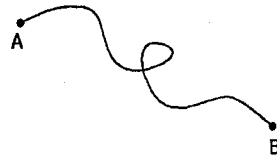
$$dx_i = v_i(x_j, t) \cdot dt \quad (5.14)$$

Naprijed navedeno može se prikazati i u slijedećem obliku odnosno pomoću sistema diferencijalnih jednačina za sve tri koordinatne ose koje su date na slici 5.4:

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} = dt \quad (5.15)$$

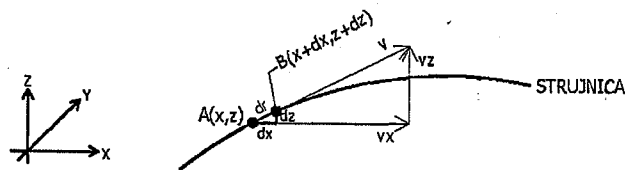
Postavljanjem početnih uslova za $t=t_0$ i $x_i(t_0)=y_i$, može se doći do jednačine trajektorija.

Trajektorija se može pratiti i registrovati ako, na primjer, jednu česticu fluida obojimo te je pratimo ili snimamo određeni period vremena (slika 5.5).



Slika 5.5 Trajektorija čestice fluida

Strujnice predstavljaju zamišljene krive linije kod kojih se smjer tangente, u svakoj tački, poklapa sa smjerom vektora brzine. U stvari, strujnica predstavlja smjer kretanja većeg broja čestica odnosno elementarnih djelića fluida u jednom istom trenutku vremena. Na strujnicama se treba naznačiti smjer strujanja, dok za nestacionarno (neustaljeno) strujanje slika strujnica se mijenja u toku vremena odnosno od jednog do drugog trenutka, te možemo konstatovati da se slika strujnica odnosi na jedan odabrani trenutak vremena. Znači da su strujnice takve linije koje su u prostoru strujanja fluida tangencijalne na vektor trenutne brzine elementarnog djelića fluida na nekom promatranom mjestu, kao što se vidi na slici 5.6.



Slika 5.6 Strujnica sa vektorom brzine

Prema slici 5.6 mogu se napisati izrazi za pređeni put čija dužina iznosi dr kao i za brzinu v u promatranj tački A , odnosno:

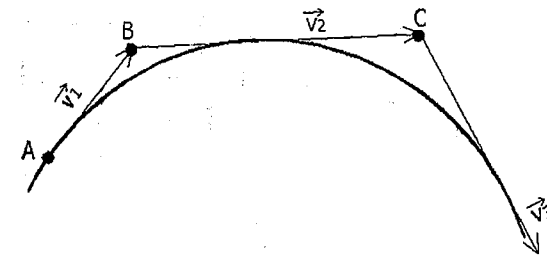
$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (5.16)$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad (5.17)$$

Izraz 5.16 predstavlja pređeni put dužine dr , dok izraz 5.17 predstavlja brzinu u tački A gdje je dr odnosno pređeni put paralelan vektoru lokalne brzine, kao što se vidi na slici 5.6. Na osnovu dva prethodna izraza dobija se jednačina strujnice u skalarnom obliku. Ova jednačina se može odrediti na osnovu sličnosti trouglova, odnosno:

$$\frac{dr}{v} = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (5.18)$$

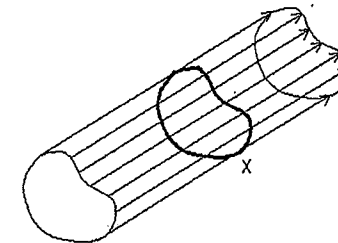
Strujanje fluida odnosno čestice fluida može se jednostavno objasniti na osnovu slike 5.7.



Slika 5.7 Nastanak i formiranje strujnice

Na slici 5.7 vidljivo je da promatrana tačka odnosno čestica A poslije određenog vremena Δt dolazi u tačku gdje je do tog vremena bila čestica B , odnosno čestica B će nakon određenog vremena doći u tačku gdje je do tada bila čestica C . Ovakav niz tačaka formira jednu isprekidanu liniju $A-B-C$ itd, koja će preći u neprekidnu krivu liniju, odnosno strujnicu, ukoliko smanjujemo vrijeme promatranja ($\Delta t \rightarrow 0$). Brzina tačke odnosno čestice A iznosi v_1 i to je vektorska veličina kome se smjer podudara sa tangentom na strujnicu, što se vidi iz slike 5.7. Kod nestacionarnog (neustaljenog) strujanja, strujnica u prostoru mijenja svoj položaj i svoj oblik.

Strujna površina se sastoji od strujnica koje prolaze tačkama neke određene krive linije X (slika 5.8).



Slika 5.8 Strujna površina

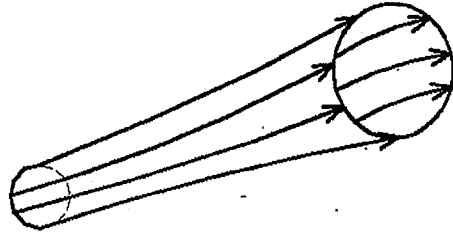
Kroz strujnu površinu nema proticaja, jer vektor brzine je tangencijalan na površ $v_i \cdot n_i = 0$, odnosno proticaj iznosi:

$$Q = \int_A v_i n_i dA = 0 \quad (5.19)$$

Sa slike 5.8 vidi se da je kriva X zatvorena, pa u tom slučaju strujna površina prelazi u omotač strujne cijevi, kroz kojeg nema protoka fluida ($Q=0$).

Ukoliko je površina poprečnog presjeka cijevi dA infinitezimalna, onda imamo elementarnu strujnu cijev. Kod graničnog slučaja $dA \rightarrow 0$ elementarna strujna cijev prelazi u strujnicu.

Strujna cijev se dobija ukoliko se povuku strujnice kroz tačke jedne zatvorene konture koja je zamišljena unutar fluida (slika 5.9).



Slika 5.9 Strujna cijev

Ukoliko je strujna cijev veoma malog prečnika (diferencijalna strujna cijev) onda je nazivamo **strujnim vlaknom**. Možemo reći da je strujna cijev konačan zbir strujnih vlakana.

5.6. Protok

Protok odnosno zapreminski protok Q predstavlja onu zapreminu čestica odnosno elementarnih djelića fluida koje u datom jediničnom vremenu prolaze kroz promatranu površinu A . Površina A je orijentisana jediničnim vektorom normale n_i . Ukoliko se elementarni djelići fluida kreću poznatom brzinom v_i , dok se tačke površine kreću brzinom u_i , onda imamo da je relativna brzina kretanja elementarnih djelića fluida prema površini data izrazom:

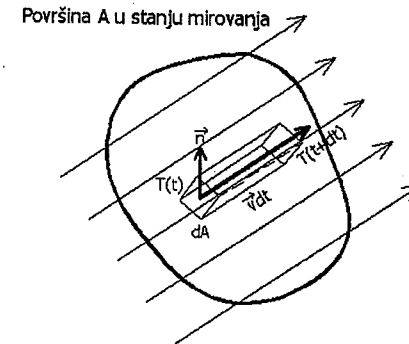
$$w_i = v_i - u_i \quad (5.20)$$

U tom slučaju protok fluida može se napisati u obliku sljedećeg izraza:

$$Q = \int_A w_i n_i dA = \int_A (v_i - u_i) n_i dA \quad (5.21)$$

Ako se promatra protok Q koji prolazi kroz jednu površinu A u stanju mirovanja (slika 5.10), odnosno kada je $u_i=0$, tada protok Q možemo napisati u opštem obliku kao:

$$Q = \int_A v_i n_i dA \quad (5.22)$$



Slika 5.10 Protok fluida kroz površinu u stanju mirovanja

Promatrani elementarni djelić fluida se nalazi na površini dA u trenutku vremena t , dok u trenutku $t+dt$ on zauzima jedan novi položaj u prostoru. Pri tome, elementarni djelić fluida prelazi put $v dt$, što znači da svojim kretanjem on opisuje kosu prizmu (slika 5.10). Visina kose prizme odgovara projekciji vektora puta na smjer normale, odnosno:

$$dh = \vec{n} \cdot \vec{v} dt = v_i \cdot n_i dt \quad (5.23)$$

Zapremina elementarnih djelića fluida u promatranom vremenu dt , koji prolaze kroz površinu dA , odgovara zapremini kose prizme, što se može napisati u obliku:

$$dV = dA \cdot dh = v_i \cdot n_i dA dt \quad (5.24)$$

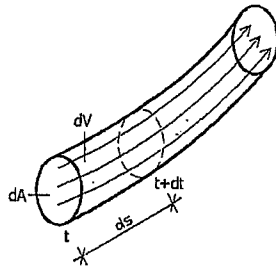
Na osnovu prethodnih izraza proizilazi da elementarni protok kroz promatranu površinu dA odgovara odnosu zapremine dV i vremena dt , odnosno:

$$dQ = \frac{dV}{dt} = v_i \cdot n_i dA \quad (5.25)$$

Ukupni protok fluida koji prolazi kroz površinu A odgovara zbiru svih elementarnih protoka fluida, odnosno:

$$Q = \int_A v_i n_i dA \quad (5.26)$$

Dakle, protok Q predstavlja količinu fluida koja protekne kroz promatranu površinu presjeka u određenom vremenskom intervalu Δt . Protok fluida se može odrediti i na osnovu gustine fluida, prema slici 5.11.



Slika 5.11 Definisavanje protoka

Poznato je da gustina fluida predstavlja odnos elementarne mase prema elementarnoj zapremini, odnosno:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (5.27)$$

Na osnovu prethodnog izraza elementarna masa dm može se izraziti kao:

$$dm = \rho \cdot dV \quad (5.28)$$

Pošto elementarna zapremina dV , prema slici 5.11, predstavlja odnos pređenog puta ds i elementarne površine poprečnog presjeka dA , dobija se izraz za elementarnu masu fluida u obliku:

$$dm = \rho \cdot ds \cdot dA \quad (5.29)$$

Ukoliko se za prethodni izraz upotrijebi brzina fluida koja predstavlja odnos pređenog puta ds prema vremenu dt za koji je elementarni djelić fluida došao u tačku za vrijeme $t+dt$, onda se dobija tzv. **maseni protok**, odnosno:

$$dm = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{ds}{dt} dA = \rho v dA \quad (\text{kg/s}) \quad (5.30)$$

gdje je;

dt – elementarno vrijeme koje je proteklo prilikom prolaska puta ds

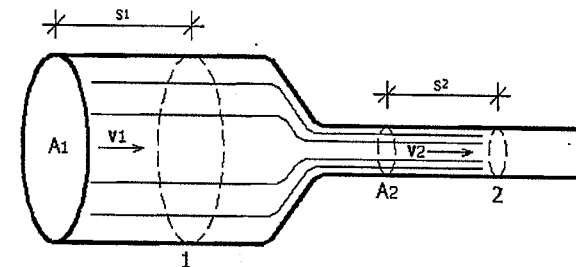
$\frac{ds}{dt}$ – trenutna brzina fluida u posmatranoj tački.

Zapreminski protok može se odrediti i preko poznatog masenog protoka dm poznavajući gustinu fluida ρ , odnosno:

$$d\dot{V} = dQ = \frac{dm}{\rho} = \frac{\rho v dA}{\rho} = v dA \quad (\text{m}^3/\text{s}) \quad (5.31)$$

5.7. Jednačina kontinuiteta

Jednačina kontinuiteta ili zakon o održanju mase predstavlja jedan od osnovnih zakona mehanike fluida, koji govori o kontinuitetu mase fluida uz uslov da ni u jednom trenutku vremena u promatranom fluidu nema prostora koji nije ispunjen tim fluidom. To znači da masa fluida koja dotječe u jedan prostor u isto vrijeme iz tog prostora mora i istjecati. Na osnovu ovoga, postavlja se pitanje: Šta će se dešiti ukoliko cijev kroz koju protječe jedan fluid nije konstantnog poprečnog presjeka? Naime, ako uzmemo baštensko crijevo i kada na kraju crijeva pritiskom prstiju smanjimo poprečni presjek, onda vidimo da voda ističe iz baštenskog crijeva većom brzinom odnosno količina vode koja protiče kroz baštensko crijevo gdje nismo smanjili poprečni presjek ista je kao količina voda koja istječe iz crijeva na mjestu gdje smo smanjili površinu poprečnog presjeka. Promjenom površine poprečnog presjeka mijenja se i brzina tečenja fluida pri čemu proticaji fluida ostaju isti. Slična pojava se dešava i kod vodotoka na mjestima gdje se riječno korito sužava pa tu nastaju brzaci i veća brzina kretanja vode, ali manja površina poprečnog presjeka vodotoka, dok na mjestu proširenja vodotoka voda će teći sporije, ali će imati veću površinu poprečnog presjeka. Znači, brzina tečenja opada kada se povećava površina poprečnog presjeka i brzina tečenja raste kada se površina poprečnog presjeka smanjuje. Ovo predstavlja suštinu jednačine kontinuiteta i njeno jednostavno objašnjenje. Ako posmatramo jednu cijev koja ima promjenjiv poprečni presjek kroz koju protječe jednaka zapremina fluida koji nije stišljiv. Jednaka zapremina fluida će za određeni interval vremena t proteći tačkama 1 i 2 (slika 5.12).



Slika 5.12 Jednačina kontinuiteta

Na osnovu prethodno navedenog, kao i na osnovu slike 5.12, mogu se napisati izrazi za zapreminu fluida koja protekne kroz promatrane tačke 1 i 2 u vremenu t , odnosno:

$$V = A_1 \cdot s_1 \quad V = A_2 \cdot s_2 \quad (5.32)$$

Rastojanja koja ista količina fluida pređe obilježena su sa s_1 i s_2 , pri čemu će pređeni put određene količine fluida da zavisi od srednje brzine strujanja tog fluida i vremena t , odnosno:

$$s_1 = v_{1sr} \cdot t \quad s_2 = v_{2sr} \cdot t \quad (5.33)$$

Iz uslova jednakosti zapremina odnosno protoka koji struje kroz promatrane tačke ili presjeke 1 i 2, dobijamo slijedeći izraz:

$$A_1 \cdot v_{1sr} = A_2 \cdot v_{2sr} \quad (5.34)$$

U mehanici fluida ova jednačina se naziva jednačinom kontinuiteta i odnosi se za sve nestišljive fluide odnosno fluide kod kojih se gustina ne mijenja te prema njoj fluid struji većom brzinom u suženju cijevi dok struji manjom brzinom gdje je proširenje cijevi odnosno veći poprečni presjek cijevi. Znači, na mjestu suženja cijevi fluid struji većom brzinom u smjeru suženja i u tom smjeru djeluje i sila na osnovu II Newtonovog zakona, a ta sila nastaje upravo zbog razlike pritisaka, te je pritisak manji u užem dijelu cijevi (manji poprečni presjek cijevi) gdje je veća brzina strujanja fluida i obratno.

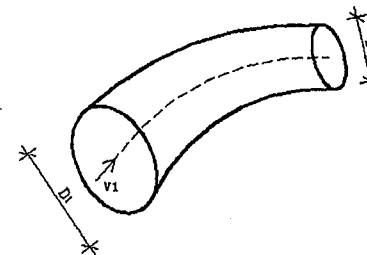
Pošto jednačina kontinuiteta predstavlja zakon o održanju mase fluida koji teče (struji) onda za stalan protok važi odnos da masa fluida koja ulazi u jedinici vremena je jednaka masi fluida koja izlazi u jedinici vremena.

5.8. Riješeni zadaci iz kinematike fluida

Zadatak 5.8.1.

Nestišljiv fluid protiče stacionarno kroz cijev promjenjivog poprečnog presjeka prema datoj slici. Odrediti kolika je brzina strujanja v_2 ukoliko su poznati prečnici cijevi i brzina strujanja fluida v_1 .

Zadato: $D_1=100$ mm ; $D_2=50$ mm ; $v_1=10$ m/s.



RJEŠENJE

$$Q = v \cdot A \Rightarrow -Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow -v_1 \cdot A_1 + v_2 \cdot A_2 = 0$$

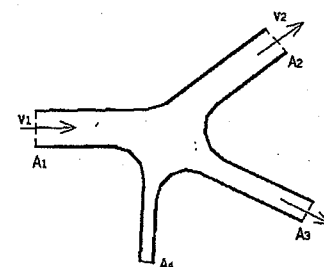
$$A_1 = \frac{D_1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0,1^2 \cdot \pi}{4} = 0,00785 \text{ m}^2 \quad A_2 = \frac{D_2^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0,05^2 \cdot \pi}{4} = 0,0019625 \text{ m}^2$$

$$v_2 \cdot A_2 = v_1 \cdot A_1 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1 \cdot A_1}{A_2} = \frac{10 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot 0,00785 (\text{m}^2)}{0,0019625 (\text{m}^2)} = 40 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Zadatak 5.8.2.

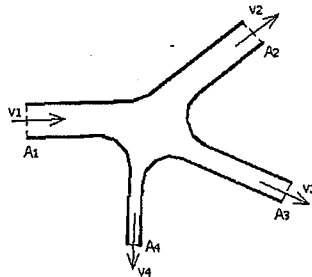
Nestišljiv fluid odnosno voda, protiče stacionarnim tokom kroz sistem kao na datoj slici. Treba odrediti brzinu i smjer tečenja vode kroz cijev 4.

Zadato: $A_1=4,50$ m² ; $A_2=3,00$ m² ; $A_3=2,00$ m² ; $A_4=1,00$ m² ; $v_1=2,0$ m/s ; $v_2=1,0$ m/s ; $v_3=3,0$ m/s.



RJEŠENJE

Pretpostavljeni smjer tečenja vode u cijevi 4:



Na osnovu jednačine kontinuiteta možemo napisati slijedeći uslov:

$$-v_1 \cdot A_1 + v_2 \cdot A_2 + v_3 \cdot A_3 + v_4 \cdot A_4 = 0$$

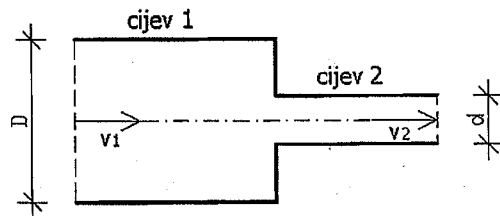
$$v_4 \cdot A_4 = v_1 \cdot A_1 - v_2 \cdot A_2 - v_3 \cdot A_3$$

$$v_4 \cdot A_4 = 2,0 \left(\frac{m}{s}\right) \cdot 4,50(m^2) - 1,0 \left(\frac{m}{s}\right) \cdot 3,0(m^2) - 3,0 \left(\frac{m}{s}\right) \cdot 2,0(m^2)$$

$$v_4 \cdot A_4 = 0,0 \left(\frac{m^3}{s}\right) \Rightarrow v_4 = 0,0 \left(\frac{m}{s}\right)$$

Zadatak 5.8.3.

Voda protiče stacionarnim strujanjem kroz cijev 1 prečnika D brzinom $v_1=1$ m/s, i utiče u cijev 2 prečnika $d=50$ mm brzinom $v_2=3$ m/s. Odrediti koji je prečnik cijevi 1.



RJEŠENJE

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

$$A_1 = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} = 0,785D^2 \quad A_2 = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0,05^2 \cdot \pi}{4} = 0,0019625m^2$$

$$1,0 \left(\frac{m}{s}\right) \cdot 0,785D^2 = 3,0 \left(\frac{m}{s}\right) \cdot 0,0019625(m^2)$$

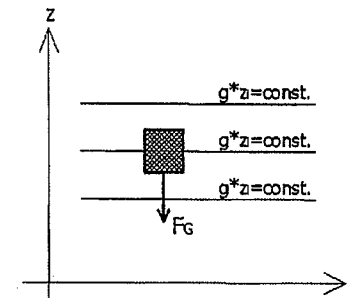
$$0,785D^2 = 0,0058875 \left(\frac{m^3}{s}\right) \Rightarrow D^2 = 0,0075 \Rightarrow D = \sqrt{0,0075} = 0,0866m$$

6. DINAMIKA FLUIDA

6.1. Uvod

Dinamika fluida predstavlja oblast mehanike fluida koja izučava fluide u kretanju. Dinamika fluida ima više podoblasti, kao na primjer: aerodinamika koja proučava vazduh i gasove u pokretu, te hidrodinamika koja proučava tečnosti u stanju kretanja zajedno sa uzrocima zbog kojih to kretanje i nastaje, a ti uzroci su sile koje djeluju na tečnosti. Sile koje djeluju na tečnosti su zapreminske ili vanjske sile te površinske ili unutarnje sile (navedene osnovne karakteristike u potpoglavlju 5.2.).

Zapreminske sile prvenstveno predstavljaju rezultat mase fluida na koji djeluju i od koje nastaju i raspoređene su unutar zapremine promatranog tijela i djeluju na svaki dio njegove mase. Ove sile nastaju bez kontakta (dodira) kao rezultat položaja mase u polju sile. Zapreminske sile su sila teže (gravitacijska sila) i sila inercije. Zapreminska sila teže (F_G) nastaje djelovanjem polja sile Zemljine teže na određenu zapreminu (V) tečnosti (slika 6.1).



Slika 6.1 Zapreminska sila

Zapreminska sila teže može se izraziti na slijedeći način:

$$F_G = - \int_V \rho g dV \quad (6.1)$$

U izrazu 6.1 postoji predznak minus, jer je vektor ubrzanja polja sile Zemljine teže (g) suprotan od smjera z ose (slika 6.1), što znači da sila težine predstavlja rezultat dejstva neke vanjske sile na promatranu masu.

Sila inercije je definisana II Newtonovim zakonom odnosno da ubrzavajuće dejstvo sile se nalazi u inercijskoj reakciji materije na koju sila djeluje. Ovaj zakon se može napisati izrazom:

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \quad (6.2)$$

Dio izraza sa desne strane ($\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i$) je zbir svih sila koje djeluju na promatranu materiju. Ukoliko je masa konstantna ($m=const$) onda prethodni izraz možemo napisati u obliku:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \quad (6.3)$$

odnosno,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n + (-m\vec{a}) = 0 \quad (6.4)$$

Izraz $(-ma)$ predstavlja silu inercije (F_I), te možemo napisati izraz:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_I = 0 \quad (6.5)$$

Površinske sile predstavljaju sile kontakta (dodira) međusobno između elementarnih djelića tečnosti ili, na primjer, između sile zida cijevi i elementarnog djelića tečnosti. Ove sile djeluju površinski odnosno na određenim presječnim površinama te se dobijaju integriranjem preko površine. Površinske sile u dinamici fluida su sila pritiska i sila trenja. Sila pritiska (F_N) djeluje upravno (upravna ili okomita sila) i nastaje kao rezultat pritiska tečnosti, određene gustine, na promatranu presječnu površinu. Izraz za silu pritiska dat je izrazom:

$$\vec{F}_N = - \int_A \rho \cdot d\vec{A} \quad (6.6)$$

Smičuća sila (F_T) nastaje kao posljedica trenja između zida cijevi i tečnosti koja se kreće odnosno struji tom cijevi. Smičuću silu možemo predstaviti slijedećim izrazom:

$$F_T = \int_A \tau_o dA \quad (6.7)$$

gdje je;

A – površine zida cijevi ili bilo koje druge čvrste stijenske uz koju teče ili struji tečnost (m^2),

τ_o – smičući napon duž čvrste stijenske (N/m^2).

Na osnovu poznavanja sila koje djeluju na promatranu tečnost može se napisati slijedeći izraz:

$$\vec{F}_G + \vec{F}_I + \vec{F}_N + \vec{F}_T = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = 0 \quad (6.8)$$

Iz izraza 6.8 vidi se da zbir svih sila koje djeluju na promatranu tečnost odnosno zbir sila teže, sila inercije, sile pritiska i sile trenja mora biti jednak nuli, ako je promatranu tečnost u tzv. dinamičkoj ravnoteži. Drugim riječima, zbir svih zapreminskih i svih površinskih sila mora biti jednak nuli.

Ako prethodni izraz posmatramo u Dekartovom pravougaonom koordinatnom sistemu, onda imamo:

$$\sum F_x = 0 ; \sum F_y = 0 ; \sum F_z = 0 \quad (6.9)$$

U izrazu 6.9 $\sum F_i$ predstavlja sumu ili zbir svih komponentnih sila u pravcu određene i -te koordinatne ose.

U slučaju mirovanja tečnosti nemamo sile trenja i sile inercije, već se javljaju samo sila teže i sila pritiska, odnosno:

$$\vec{F}_I = \vec{F}_T = 0 \Rightarrow \vec{F}_G + \vec{F}_N = 0 \quad (6.10)$$

Proračuni u dinamici fluida imaju veoma raznovrsno područje primjene kao što je, na primjer, određivanje brzine protoka vode ili bilo kog drugog fluida kroz cijevi, zatim određivanje sila i pritisaka kod cijevnih sistema i slično.

U građevinskoj praksi uglavnom se izučava kretanje tečnosti, prvenstveno vode, pa kažemo da izučavamo **hidrodinamiku**.

6.2. Osnovne dinamičke jednačine strujanja tečnosti

Postoje dvije osnovne dinamičke jednačine strujanja tečnosti, i to:

- 1) jednačina koja se odnosi na **zakon održanja količine kretanja**
- 2) **Bernoullijeva jednačina**.

Jednačina kontinuiteta koja je obrazložena u potpoglavlju 5.7. zajedno sa navedene dvije osnovne dinamičke jednačine strujanja tečnosti, predstavljaju osnovne tri jednačine hidraulike.

6.2.1. Jednačina održanja količine kretanja

Ukoliko posmatramo jednu konačnu masu tečnosti, onda količina kretanja (K_k) može se napisati na osnovu izraza:

$$\vec{K}_k = m \vec{v} \quad (6.11)$$

Na osnovu II Newtonovog zakona, izraz 6.3 može se napisati u slijedećem obliku:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \Rightarrow \frac{dK_k}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i \quad (6.12)$$

Iz izraza 6.12 proizilazi da kod jedne konačne mase tečnosti u određenoj jedinici vremena, ukupna promjena količine kretanja je jednaka zbiru svih sila koje djeluju na tu masu tečnosti u istom trenutku vremena.

Poznavajući odnos između zapremine i protoka tečnosti u jedinici vremena može se napisati:

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \rho \cdot Q dt$$

$$Q = \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$m = \left(\int_A \rho \cdot \vec{v} d\vec{A} \right) dt \quad (6.13)$$

Kada u izrazu 6.13 obje strane ispred i iza znaka jednakosti se pomnože sa brzinom v , imamo izraz:

$$mv = \left(\int_A \rho \cdot \vec{v} d\vec{A} \right) \vec{v} dt \quad (6.14)$$

Pošto $m \cdot v$ odgovara količini kretanja K_k , onda se dobija izraz:

$$\left(\int_A \rho \cdot v dA \right) v = \left(\int_A \rho \cdot Q \right) v \quad (6.15)$$

Ukupna promjena količine kretanja (K_k) može se napisati u slijedećem obliku:

$$\frac{dK_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_A (\rho dV) \vec{v} + \int_A (\rho dQ) \vec{v} \quad (6.16)$$

Za ustaljeno strujanje:

$$\int_A (\rho dQ) \vec{v} = \sum_{i=1}^{i=n} F_i \quad (6.17)$$

U izrazu 6.17 lijevi član jednačine je sila inercije.

6.2.2. Bernoullieva jednačina

6.2.2.1. Rad i energija

Opšti pristup dobijanja parametara kretanja krutih, odnosno čvrstih materija i tečnosti je primjena principa očuvanja energije. Naime, kada je trenje zanemarljivo zbir kinetičke energije i gravitacijske potencijalne energije je nepromjenjiv. Iz osnovnih zakonitosti fizike poznato je da zbir kinetičke i potencijalne energije predstavlja konstantnu vrijednost, tako da možemo pisati:

Početna kinetička energija + Početna potencijalna energija = Konačna kinetička energija + Konačna potencijalna energija.

Kinetička energija iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 \quad (6.18)$$

Gravitaciona potencijalna energija iznosi:

$$E_p = mgh \quad (6.19)$$

gdje je;

m – masa,

v – brzina,

h – visina.

Ovo se može objasniti na primjeru padanja kapljica tečnosti. Početna brzina počinje od nule, a sa visine h pada kapljica tečnosti. U tom slučaju može se napisati:

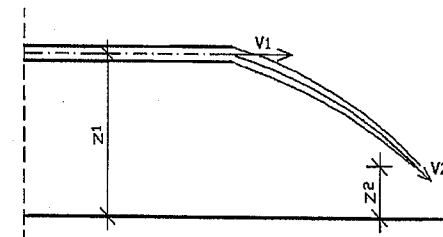
Početna kinetička energija = 0.

Početna potencijalna energija = mgh

Konačna kinetička energija = $\frac{1}{2} mv^2$

Konačna potencijalna energija = 0.

Na sličan način se može posmatrati kada je kontinualan mlaz tečnosti, kao na slici 6.2.



Slika 6.2 Putanja mlaza tečnosti

Posmatrajmo stanje kao na slici 6.2 gdje kontinualan mlaz tečnosti ističe iz cijevi brzinom v_1 . Jedna čestica ili djelić tečnosti sa masom m u mlazu pada sa visine z_1 na visinu z_2 . Brzine se takođe mijenjaju od v_1 do v_2 . Sa slike 6.2 vidi se da je mlaz tečnosti od izlaza iz cijevi samo pod atmosferskim pritiskom. Dakle, jedina sila koja djeluje na promatrani mlaz tečnosti je sila gravitacije, pri čemu zbir kinetičkih i potencijalnih energija ostaje konstantan, ukoliko zanemarimo gubitke energije na trenje ovaj slučaj se može predstaviti kao:

$$mgz_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgz_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (6.20)$$

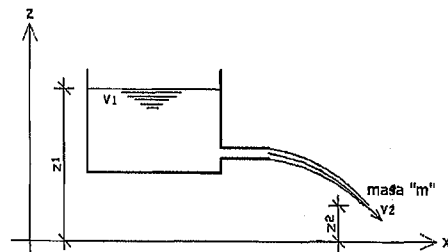
Pošto je masa m konstanta onda prethodni izraz se piše u obliku:

$$gz_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gz_2 + \frac{1}{2}v_2^2 \quad (6.21)$$

Navedeni obrazac daje dosta tačan rezultat sve dok je težina mlaza velika u odnosu na sile trenja odnosno to je primjenjivo dok god je mlaz u kontinuitetu odnosno sve dok se ne rasprši u kapljice.

6.2.2.2. Istjecanje iz rezervoara

Na slici 6.3 prikazan je „idealni“ rezervoar.



Slika 6.3 Istjecanje iz rezervoara

Nivo vode u rezervoaru je na visini z_1 . Pošto nema kretanja vode u rezervoaru, onda je kinetička energija jednaka nuli, dok je potencijalna gravitacijska energija jednaka mgz_1 . Ako je cijev priključena pri dnu rezervoara onda se nivo vode koja ističe izvan rezervoara nalazi na visini z_2 . Masa vode m potekla je iz vrha rezervoara u mlaznicu te se dobila brzina v_2 . Kinetička energija sada odgovara izrazu:

$$E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (6.22)$$

Potencijalna energija odgovara izrazu:

$$E_p = mgz_2 \quad (6.23)$$

Sumirajući na osnovu ranije navedenog može se napisati slijedeće:

Početna kinetička energija = 0.

Početna potencijalna energija = mgz_1 .

Konačna kinetička energija = $\frac{1}{2}mv_2^2$

Konačna potencijalna energija = mgz_2 .

Pošto je zbir kinetičke i potencijalne energije konstantan, može se napisati:

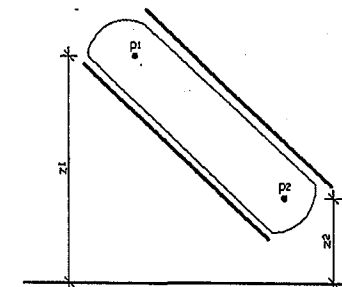
$$mgz_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2 \quad (6.24)$$

$$mg(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (6.25)$$

$$mv_2^2 = 2mg(z_1 + z_2) \Rightarrow v_2^2 = 2g(z_1 + z_2)$$

$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 + z_2)} \quad (6.26)$$

U poglavlju 4 koje obrađuje hidrostatiку, odnosno fluid u stanju mirovanja, vidjeli smo primjer razlike pritiska gdje su brzine strujanja jednake nuli.



Slika 6.4 Cijev ispunjena stacionarnim fluidom

Cijev je ispunjena stacionarnim fluidom gustine ρ i ima pritiske p_1 i p_2 kod položaja z_1 i z_2 (slika 6.4). Nameće se pitanje koja je razlika pritiska kod ovih položaja. Na osnovu dosadašnjih znanja iz hidrostatičke možemo napisati:

$$p_2 - p_1 = \rho g \cdot (z_1 - z_2) \quad (6.27)$$

ili

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \quad (6.28)$$

Ovo vrijedi kada pritisak varira, a tečnost je stacionarna. Usporedimo ovo u jednačini dobijenoj za kretanje tečnosti, ali stalnog pritiska, pa imamo:

$$\frac{1}{2} v_1^2 + gz_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + gz_2 \quad (6.29)$$

Vidimo da jednačine imaju sličan oblik. Međutim, šta se događa ukoliko su oba pritiska (p_1 i p_2) i brzine (v_1 i v_2) promjenjive? Odgovor na ovo pitanje daje Bernoullieva jednačina.

6.2.2.3. Bernoullieva jednačina idealnog fluida

U dinamici fluida Bernoullieva jednačina se sigurno najviše primjenjuje te ima posebnu važnost. Koristi se i za ustaljeno i za neustaljeno strujanje fluida. U osnovi, Bernoullieva jednačina pokazuje odnos između brzine, pritiska i gustine fluida koji se nalaze u kretanju odnosno vode čija dejstva najviše razmatramo i rješavamo u građevinskoj hidrotehničkoj praksi. Korištenje Bernoullieve jednačine najbolje se pokazuje kod strujanja realne (stvarne) tečnosti. Međutim, za bolje razumijevanje Bernoullieve jednačine potrebno je prvo analizirati njenu primjenu kod idealne tečnosti (bez pojave trenja). Kod tečenja (strujanja) nestišljive idealne tečnosti ukupna energija tečnosti jednaka je duž svih promatranih presjeka, odnosno povećanjem brzine strujanja tekućine smanjuje se njen hidrostatički pritisak i obratno. Suma hidrostatičkog i hidrodinamičkog pritiska daje ukupan pritisak koji je konstantan duž svih promatranih presjeka cijevi. Bernoullieva jednačina predstavlja zakon održanja energije. Kod ustaljenog (stacionarnog) strujanja tečnosti, jedinica mase tečnosti odnosno njen diferencijalni dio ima nepromjenjivu (konstantnu) energiju duž promatrane strujne cijevi.

Kod idealne nestišljive tečnosti sa ustaljenim strujanjem koja se nalazi pod dejstvom sile vlastite težine (F_G), sile pritiska (F_N) i sile inercije (F_I), Bernoullieva jednačina u visinskom obliku se može prikazati (slika 6.5) i iskazati preko izraza:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = E_{sp} = const \quad (6.30)$$

gdje je;

z_i – geodetska visina ili visina položaja promatrane tačke u datom presjeku (m),

p_i – pritisak u datoj i-toj tački (N/m^2),

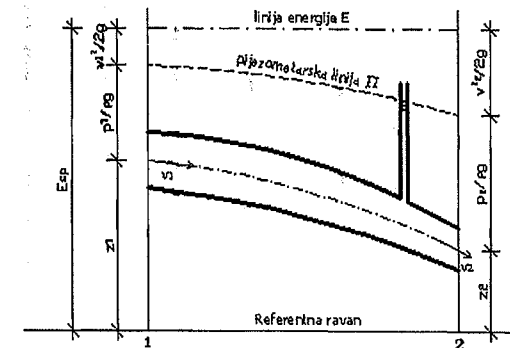
ρ – gustina tečnosti (kg/m^3),

g – ubrzanje sile teže (m/s^2),

v_i – srednja vrijednost brzine u promatranom presjeku (m/s),

E_{sp} – visina energije ili specifična mehanička energija (m).

Specifična mehanička energija (E_{sp}) predstavlja energiju jedinice mase tečnosti u odnosu na proizvoljno odabranu horizontalnu ravan (referentna ravan).



Slika 6.5 Bernoulli-jeva jednačina idealne tečnosti za ustaljeno strujanje

Izraz 6.30 predstavlja tzv. visinski oblik Bernoullieve jednačine koji nam daje uvid u stanje bilansa energije duž toka tečnosti. Bernoullieva jednačina (izraz 6.30) pokazuje konstantnost specifične mehaničke energije idealne tečnosti pri strujanju. Specifična mehanička energija sastoji se od potencijalne i kinetičke energije.

U izrazu 6.30 pojedini članovi Bernoullieve jednačine imaju slijedeće značenje: z – nazivamo geodetskom visinom položaja ili geometrijskom visinom (m),

$\frac{p}{\rho g}$ – nazivamo tlačnom visinom ili visinom pritiska (m),

$\frac{v^2}{2g}$ – nazivamo brzinskom visinom (m).

Iz izraza 6.30 može se dobiti tzv. **pijezometarska linija** koja predstavlja zbir geodetske visine položaja promatranog presjeka duž cijevi i tzv. tlačne visine,

odnosno $z + \frac{p}{\rho g} = \Pi$. Do piezometarske visine Π je moguće podizanje vode po

visini u vodovodnoj mreži ili će se do te visine podići voda u tankoj cjevčici koja je spojena na promatranu cijev (slika 6.5). Pijezometarska linija se mijenja po dužini cijevi i to predstavlja **pijzometarski pad**.

Bernoullieva jednačina za idealnu tečnost ima osnovnu karakteristiku da za sve tačke duž promatrane linije toka je zbir svih visina (geodetska visina, tlačna i brzinska visina) konstantna ili nepromjenjiva veličina, što predstavlja liniju energije E .

Bernoullieva jednačina idealnog fluida ima određena ograničenja kod svoje primjene, kao što su:

- protok je stalan,
- gustina je konstantna što znači da je fluid nestišljiv,
- gubici na trenje prilikom strujanja fluida su zanemarljivi.

Jednačina se odnosi na stanje u dvije tačke duž jedne linije toka, a ne na uslove kod dvije različite linije toka. Sve ove uslove je nemoguće zadovoljiti u svakom trenutku u datom vremenskom periodu. Međutim, kod mnogih stvarnih (realnih) situacija gdje su navedeni uslovi približno zadovoljeni odnosno ispunjeni, ova jednačina daje veoma dobre rezultate.

6.2.2.4. Bernoullieva jednačina realnog fluida

Strujanje realne tečnosti se razlikuje od strujanja idealne tečnosti po tome što specifična energija duž promatranog toka nije konstantna već opada, jer se njen dio bespovratno gubi odnosno prelazi u toplotnu energiju. Opadaje ili smanjenje specifične energije kod realne tečnosti nastaje zbog savladavanja otpora koji nastaju prilikom strujanja tečnosti.

Bernoullieva jednačina u visinskom obliku kod stacionarnog (ustaljenog) strujanja nestišljive tečnosti između neka dva promatrana i odabrana presjeka, može se napisati preko izraza:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2g} + \Delta H \quad (6.31)$$

Izraz 6.31 je dosta sličan Bernoullievoj jednačini idealnog fluida (pisano u visinskom obliku) uz uvođenje novih oznaka, kao što su α_i (Coriolisov koeficijent) i ΔH (dio specifične energije potrošen na savladavanje otpora prilikom strujanja tečnosti).

Iz izraza 6.31 može se zaključiti da je ukupna promjena energije promatrane zapremine tečnosti u određenoj jedinici vremena jednaka radu svih sila koje u toj istoj jedinici vremena djeluju na tečnost, a to znači da navedeni izraz sadrži zakon održanja energije primjenjen na tečnosti.

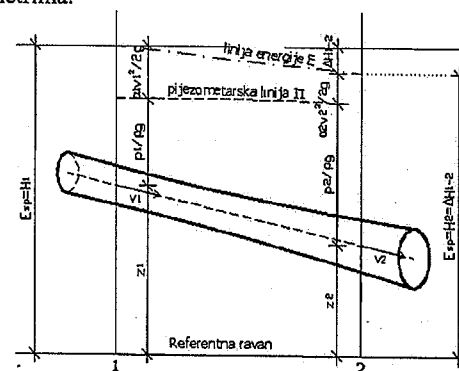
Coriolisov koeficijent (α_i), u izrazu 6.31, predstavlja koeficijent kinetičke energije. Ovaj koeficijent pokazuje odnos mase koja protiče kroz površinu

poprečnog presjeka toka u jednoj sekundi (stvarna kinetička energija mase tečnosti) prema kinetičkoj energiji dobijenoj iz uslova da su u svim tačkama poprečnog presjeka toka brzine jednake srednjoj vrijednosti brzine. Coriolisov koeficijent kao bezdimenzionalna veličina, u hidrotehničkoj praksi, ima slijedeće vrijednosti:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 1,0$ – tečenje (strujanje) u cijevima,

$\alpha = 1,1$ – tečenje (strujanje) u kanalima i otvorenim vodotocima.

Promatrajući ΔH u energijskom smislu može se reći da je to rad svih sila otpora koji se odnosi na jedinicu mase viskozne tečnosti prilikom njenog strujanja od presjeka 1 do presjeka 2 (slika 6.6), odnosno kraće rečeno ΔH je dio specifične energije koji se troši na savladavanje svih otpora prilikom strujanja tečnosti i izražava se u metrima.



Slika 6.6 Bernoullieva jednačina realne tečnosti za ustaljeno strujanje u cijevima

Sa slike 6.6 vidi se da pijezometarska linija II duž toka struje tečnosti može da raste i da opada, dok energetska linija E uvijek opada duž toka strujanja tečnosti. Ukoliko postoji jednoliki pad linije energije E onda odnos između gubitaka ΔH prema dužini promatrane dionice strujnog toka naziva se **hidraulički pad** (I_E), pa se može napisati kao:

$$I_E = \frac{\Delta H}{\Delta L} \quad (6.32)$$

6.2.2.5. Hidrodinamički otpori

Prilikom proticanja fluida kroz cjevovod ili kanal nastaju određeni gubici energije. Cjevovod predstavlja sistem cijevi, račvi, ventila i ostalih dijelova i elemenata cijevne mreže. Kod nestišljivih realnih fluida sa ustaljenim tečenjem Bernoullieva, odnosno energetska jednačina napisana je u obliku prema izrazu 6.31 sa promatranim strujanjem fluida između dva presjeka koji se nalaze na određenoj međusobnoj rastojanju L_{1-2} (prema slici 6.6). Hidrodinamički

gubici su posljedica savladavanja hidrodinamičkih otpora prilikom strujanja fluida. Kod realnih fluida u cijevima i kanalima hidrodinamički otpori mogu biti:

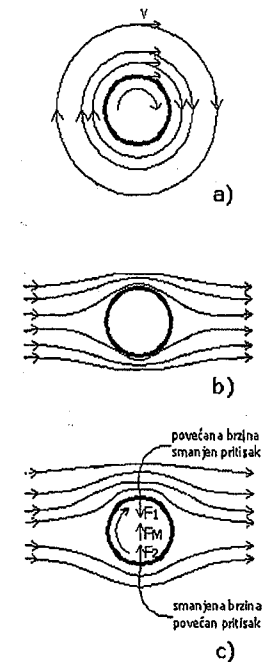
- a) otpori oblika,
- b) otpori površine.

a) Otpori oblika

Ako promatramo strujanje tečnosti duž ploča ili duž neke zakrivljene čvrste granice, tada će se javiti promjena brzine duž promatranog toka sa promjenom pritiska duž tog toka strujanja tečnosti. Raspored brzina duž toka zavisi od gradijenta pritiska, pa tako ukoliko imamo divergentni tok (strujanje se usporava) onda će pritisci da se povećavaju dok se brzine smanjuju u graničnom sloju. Smanjenje brzina strujanja dešava se zbog usporenja osnovnog toka strujanja i zbog dejstva sila viskoznosti (unutarnje trenje).

Promatrajući uzvodni dio strujanja tečnosti, zbog usporenja toka pritisci se povećavaju i to se prenosi na granični sloj, pa nizvodno od promatranog presjeka nastaje tzv. uzvodno strujanje. Mjesto ili tačka u kojoj se javlja ova pojava naziva se tačka odvajanja graničnog sloja. Kod zakrivljenih površina odvajanje graničnog sloja dešava se na mjestu prelaska toka iz područja ubrzavanja u područje usporavanja strujanja odnosno neposredno iza promjene predznaka gradijenta pritiska. Prilikom nastanka odvajanja graničnog sloja vrtloženje djelića tečnosti postoji i u drugim dijelovima toka odnosno vrtloženje nije ograničeno samo na granični sloj.

Kod, na primjer, slučaja kada čvrsto tijelo rotira u struji fluida ili preciznije u tečnosti, onda nastaje tzv. Magnusov efekat (Gustav Magnus, 1802 – 1870), jer na takvo tijelo djeluje sila koja je normalna na osu rotacije čvrstog tijela i nastaje zbog razlike pritiska na gornjoj i donjoj strani površine čvrstog tijela u struji fluida. Magnusov efekat predstavlja posebnu vrstu Bernoullievog principa koji govori o tome da u oblasti kretanja fluida pritisci se povećavaju dok se brzine smanjuju i obratno. Magnusov efekat ne objašnjava uzrok nastanka sile koja djeluje na čvrsto tijelo u struji fluida, nego nam daje samo veličinu sile koja djeluje na to tijelo u struji fluida. Uzrok nastanka te sile objasnio je Prandtl 1904. godine analizirajući tu pojavu na graničnom sloju fluida. Magnusov efekat može se objasniti promatrajući čvrsto tijelo oblika valjka u struji fluida, kao što je prikazano na slici 6.7.



Slika 6.7 Magnusov efekat: a) valjak koji rotira u fluidu – pogled sa strane, b) valjak koji miruje u struji fluida, c) valjak koji rotira u struji fluida

Promatrajmo jedno čvrsto tijelo oblika valjka koji se nalazi u jednom fluidu koji ima određenu viskoznost. Slika 6.7 pod (a) pokazuje bočni pogled na valjak sa strujnim linijama fluida. Ukoliko valjak počne da rotira onda se zbog trenja između fluida i valjka javlja sila trenja na promatrani valjak i na najbliži sloj fluida koji „okružuje“ valjak. Ta sila se suprotstavlja kretanju valjka i pokreće prvi sloj fluida koji se nalazi oko valjka. Oko tog prvog sloja fluida nalazi se slijedeći sloj fluida te se između tih slojeva javlja sila trenja koja i pokreće slijedeći sloj, te tako fluid oko valjka se kreće u smjeru rotacije valjka. Povećanjem udaljenosti od valjka dolazi do smanjenja brzine strujanja fluida.

Na slici 6.7 pod (b) dat je valjak koji miruje u struji fluida određene viskoznosti. Oblik strujnih linija pokazuje da se brzina fluida povećala sa gornje i donje strane valjka u odnosu na slučaj pod (a). Povećanje brzina nastaje zbog tzv. „opstrujavanja“ čestica fluida koje zaobilaze valjak i prelaze duži put pa im se brzina mora povećati.

Slika 6.7 pod (c) pokazuje valjak koji rotira u struji fluida. Možemo da saberemo brzine strujanja fluida sa slike (a) i sa slike (b), i vidimo da su smjerovi brzine fluida nastalih zbog rotacije i smjerovi brzine fluida nastalih zbog strujanja, međusobno jednaki iznad valjka te tu imamo njihovo sabiranje i samim time i povećanje brzine strujanja. Ispod valjka vidimo da su smjerovi

brzina međusobno suprotni te je ukupna brzina manja od brzine strujanja fluida. Znači, iznad valjka imamo povećane brzine, a prema Bernoullievoj jednačini u tom dijelu (iznad valjka) dolazi do smanjenja pritiska. Na donjoj strani valjka brzine su smanjene, a prema Bernoullievoj jednačini u tom dijelu (ispod valjka) dolazi do povećanja pritiska. Upravo iz tih razloga (pritisak sa donje strane valjka veći je od pritiska sa gornje strane) javlja se rezultatna sila na tijelo odnosno na valjak koja je usmjerena od mjesta višeg na mjestu nižeg pritiska i ta sila se naziva Magnusova sila.

Magnusovu silu možemo odrediti preko slijedećeg izraza:

$$F_M = k \cdot f \cdot v \cdot C_D \quad (6.33)$$

gdje je;

F_M – Magnusova sila,

k – konstanta proporcionalnosti,

f – frekvencija rotacije tijela u struji fluida,

v – brzina strujanja fluida,

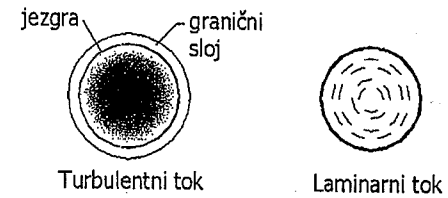
C_D – dinamički koeficijent otpora datog tijela.

b) Otpori površine

Otpori površine odnose se na razmatranje graničnog sloja duž nepomične, ravne i čvrste stijenke cijevi, na primjer, ili neke druge podloge. Kod strujanja tečnosti određene viskoznosti, u blizini navedene čvrste stijenke postoji zona strujnog toka u kojoj postoji promjena brzine tečnosti od one zone toka koju posjeduje čvrsta granica do one zone toka gdje je raspored brzine takav da strujanje možemo smatrati idealnim odnosno neviskozim i gdje nestaje vrtloženje strujnog toka. Granični sloj predstavlja zonu ovakvog strujanja u neposrednoj blizini čvrste podloge ili stijenke cijevi gdje se javljaju znatni gradijenti brzina. Smičuća komponenta brzine unutar graničnog sloja se naglo mijenja u smjeru upravo na podlogu ili stijenku cijevi, od nulte vrijednosti do vrijednosti brzine slobodnog strujanja na vanjskom rubu graničnog sloja i dejstvo viskoznosti je važno i strujanje je vrtložno.

Granični sloj je veoma tanak tako da se može zanemariti uticaj zakrivljenosti površine strujanja u tom graničnom sloju. Zbog toga granični sloj promatramo na ravnoj površini sa podužnom promjenom pritiska i sa promjenom vanjske brzine kakve su u zakrivljenom graničnom sloju, a poprečnu promjenu pritiska zanemarujemo. Takav model graničnog sloja koristimo u rješavanju opticanja strujnog toka oko tijela. Znači, prvo promatramo opticanje tijela zanemarujući postojanje graničnog sloja, a potom usvajamo da je podužna promjena pritiska i vanjske brzine na graničnom sloju ista kao i promjena pritiska i vanjske brzine koju smo dobili na tijelu bez sila viskoznosti. Ovo možemo smatrati opravdanim zbog toga što je promjena pritiska upravo na granični sloj izuzetno mala ili

gotovo neznačajna, te smatramo da je pritisak konstantan u poprečnom presjeku graničnog sloja.



Slika 6.8 Vrste strujanja i granični sloj

Kod laminarnog strujanja (slojevito strujanje) nema izraženog tzv. jezgra tečenja, dok kod turbulentnog strujanja postoji jezgro tečenja i granični sloj. Na početku postoji laminarni granični sloj neovisno o vrsti strujanja (laminarno ili turbulentno), a daljim povećanjem Reynoldsovog broja i daljim širenjem graničnog sloja, laminarno strujanje postaje nestabilno te se unutar graničnog sloja razvija turbulencija te područje laminarnog sloja postaje sve manje i uže dok područje turbulentnog graničnog sloja postaje sve veće i šire. Uz stijenku cijevi ili drugu čvrstu podlogu, u području turbulentnog graničnog sloja, nastaje veoma tanak sloj sa izuzetno velikim gradijentima brzine i veoma velikim unutarnjim trenjem.

Prelazak iz laminarnog graničnog sloja u turbulentan granični sloj nalazi se u prilično malom odnosno uskom području koji nazivamo **prelazno područje** čija veličina zavisi od jačine turbulencije u slobodnom toku fluida.

U hidrotehničkoj inženjerskoj praksi proračun otpora površine kod strujanja u cijevima definiše se Darcy-Weisbachovim oblikom koeficijenta otpora strujanju usljed trenja. Koeficijent trenja obilježava se sa λ , i preko slijedećeg izraza povezan je sa lokalnim koeficijentom otpora trenja u graničnom sloju, odnosno:

$$\lambda = 4 \cdot \xi \quad (6.34)$$

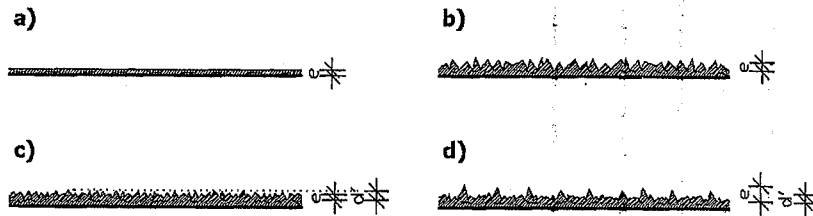
Razvojem graničnog sloja na čvrstoj podlozi nastaju tangencijalni naponi (τ_0) koji se mogu izraziti na slijedeći način:

$$\tau_0 = \xi \frac{\rho \cdot v_0^2}{2} \quad (6.35)$$

gdje je;

ξ – lokalni koeficijent otpora trenja (zavisi od razvoja graničnog sloja i Reynoldsovog broja).

U prirodnim uslovima svaka čvrsta podloga pa i stijenka cijevi, na primjer, posjeduje određenu hrapavost. Hrapavost podloge bitno utiče na parametre graničnog sloja i na to u kakvom strujanju se razvija granični sloj. Naime, apsolutna fizička hrapavost e (mm) određene površine može biti prirodna i vještačka (slika 6.9).



Slika 6.9 Fizička hrapavost površine
a) vještačka pješčana hrapavost b) prirodna hrapavost
c) hidraulički glatka površina d) hidraulički hrapava površina

Vještačka hrapavost se uglavnom odnosi na zrnastu ili pješčanu jednoličnu hrapavost. Dosta je teško utvrditi apsolutnu prirodnu hrapavost pa u praksi se uvodi pojam tzv. ekvivalentne vještačke hrapavosti ili prirodne (hidrauličke) hrapavosti.

Kod laminarnog strujanja nema tzv. miješanja slojeva tečnosti i veličina hrapavosti ne utiče na režim strujanja unutar graničnog sloja, te vrijednost koeficijenta otpora trenja λ zavisi samo od veličine Reynoldsovog broja (Re). Laminarno strujanje u cijevima karakteriše linearan zakon u funkciji Reynoldsovog broja i koeficijenta otpora trenja i dat je izrazom:

$$\xi = \frac{16}{Re} \quad (6.36)$$

Na osnovu izraza 6.34, vrijednost koeficijenta trenja λ pri laminarnom strujanju iznosi:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.37)$$

Vrijednost Reynoldsovog broja data je izrazom 5.3 za $Re \leq 2320$.

Kod turbulentnog strujanja preovladava tzv. turbulentni granični sloj te fizička hrapavost može različito uticati na otpor površine u zavisnosti da li je apsolutna hrapavost e manja ili veća od debljine viskozno podslaja δ .

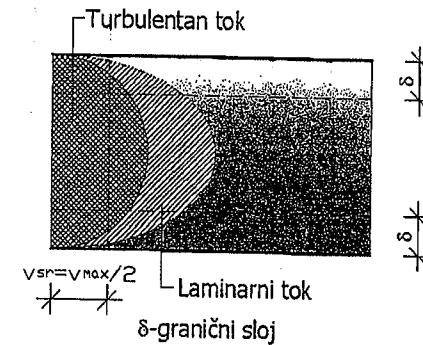
Ukoliko je apsolutna hrapavost površine (e) manja od debljine viskozno podslaja δ koji u pogledu miješanja tečnosti se ponaša kao laminaran sloj, onda kažemo da imamo hidraulički glatku površinu ili turbulentno gladak režim

strujanja. Koeficijent otpora trenja λ i u ovom slučaju zavisi samo od Reynoldsovog broja, pa za strujanje u cijevima imamo izraz:

$$\lambda = 0,316 \cdot Re^{-1/4} \quad (6.38)$$

Ova zakonitost odnosno ovaj izraz vrijedi za veličinu $Re < 10^5$.

Raspored brzine strujanja i položaj i veličina viskozno podslaja kod cijevi dati su na sljedećoj slici:



Slika 6.10 Raspored brzina i granični sloj u cijevima

Vrijednost debljine graničnog sloja d za cijevi može se odrediti na osnovu izraza:

$$\delta = \frac{d}{\sqrt{Re}} \quad (6.39)$$

Na osnovu eksperimenata Prandtl (1930) odredio je zakonitost promjene koeficijenta trenja λ u hidraulički glatkim cijevima:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (6.40)$$

Na osnovu izraza 6.40 vrijednost koeficijenta trenja λ određuje se iterativnim postupkom odnosno postepenim približavanjem vrijednosti za λ .

Ukoliko je apsolutna hrapavost površine (e) veća od debljine viskozno podslaja δ (slika 6.9 d) onda veličina otpora površine zavisi od veličine hrapavosti te površine i to je tzv. hidraulički hrapava površina.

U sljedećoj tabeli date su vrijednosti apsolutne hrapavosti za nove cijevi izvedene od različitih materijala:

Tabela 5. Vrijednosti apsolutne hrapavosti za različite vrste cijevi

VRSTA CIJEVI	e (mm)
Staklene	< 0,001
Plastične i bakrene	0,01
Čelične valjene	0,1
Čelične ljevane	0,5
Betonske	2

U praktičnoj primjeni prilikom strujanja tečnosti u cijevima primjenjuje se tzv. relativnu hrapavost. Relativna hrapavost predstavlja odnos apsolutne hrapavosti e (mm) i prečnika cijevi D (mm), što znači da koeficijent trenja λ zavisi od apsolutne hrapavosti i prečnika cijevi.

Primjenom Prandtlovog izraza može se odrediti veličina koeficijenta trenja λ u turbulentnom i hrapavom režimu kod strujanja u cijevima:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{e}{D} + 1,14 \quad (6.41)$$

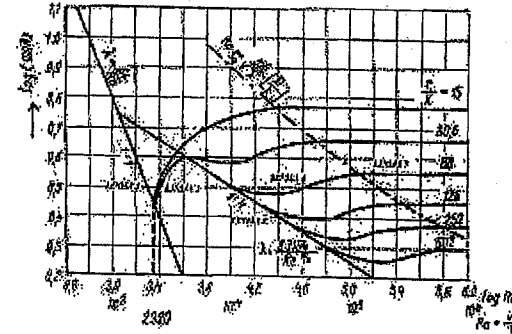
Između dva prethodno navedena granična sloja postoji tzv. prelazno područje koje se naziva turbulentni prelazni režim strujanja. U ovom području koeficijent trenja λ zavisi od Reynoldsovog broja i relativne hrapavosti (e/D).

Turbulentni prelazni režim strujanja u cijevima sa prirodnom hrapavošću dat je izrazom Colebrook-Whitea:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{e/D}{3,71} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right) \quad (6.42)$$

U ovom slučaju (izraz 6.42) moguće je odrediti koeficijent trenja λ iterativnim postupkom.

Nikuradse je tokom 1932. i 1933. godine proveo niz eksperimenata u hidraulički glatkim i hrapavim cijevima u svrhu određivanja promjene koeficijenta trenja λ . Naime, Nikuradse je cijevi vještački ohrapavio zrcitna pijeska. Na osnovu eksperimenata došao je do zaključka o vrijednosti logaritma koeficijenta trenja λ na osnovu logaritma Reynoldsovog broja (R_e) za različite odnose r/k ($r=D/2$) gdje je k visina pješčane hrapavosi, dok je r poluprečnik cijevi (slika 6.11).



Slika 6.11 Koeficijent trenja, prema Nikuradseu, za strujanje u cijevima različite hrapavosti

Sa dijagrama prikazanog na slici 6.11 može se vidjeti da sve do veličine koja iznosi $\log R_e = 3,3$, a što predstavlja vrijednost Reynoldsovog broja od $R_e = 2320$, sve tačke koje su određene eksperimentima, nalaze se na pravcu lijevo od te vrijednosti, što odgovara laminarnom strujanju koje ne zavisi od hrapavosti cijevi. Kriva koeficijenta trenja λ za najveću prikazanu hrapavost ($r/k=15$) odvaja se od drugog prikazanog pravca za glatke cijevi što se vidi na dijagramu, dok krive manje hrapavosti na svom početku jednim dijelom slijede krivu za hidraulički glatke cijevi te se potom odvajaju od nje. Vidimo da nakon odvajanja krivih koeficijenta trenja λ od krive za hidraulički glatke cijevi, one postaju gotovo paralelne sa x-osom odnosno apcison te koeficijent trenja λ ne zavisi više od Reynoldsovog broja nego samo od relativne hrapavosti te to predstavlja područje potpune turbulencije.

Sa slike 6.11 može se vidjeti da u intervalu $3,3 < \log R_e < 3,5$ odnosno na prelazu iz laminarnog u turbulentno strujanje, položaj tačaka dobijenih Nikuradseovim eksperimentima ne pokazuje njihovu zavisnost od relativne hrapavosti.

Na osnovu prethodnih izraza (6.37, 6.40, 6.41, 6.42), Moody (1944) je izradio dijagram koji se primjenjuje za proračun otpora strujanja usljed trenja u cijevima (Moodyev dijagram dat u prilogu broj 4). Na dijagramu je povučena granica (isprekidana linija) između turbulentnog prelaznog i turbulentnog hrapavog režima strujanja. Naime, očitanjem sa Moodyevog dijagrama moguće je jednostavno odrediti koeficijent trenja λ . Moodyev dijagram je prikazan u logaritamskoj skali i u njemu se nalaze krive čiji parametar je relativna hrapavost. Određivanje koeficijenta trenja λ pomoću ovog dijagrama svodi se na prethodno određivanje Reynoldsovog broja za dati slučaj koji analiziramo. Nakon toga, odabiremo krivu koja odgovara relativnoj hrapavosti cijevi za koju određujemo koeficijent trenja λ , te sa nje za određenu vrijednost Reynoldsovog broja sa ordinata očitamo pripadajuću vrijednost koeficijenta trenja λ . Nakon toga nam je preostalo da postavimo kriterije za određivanje o kojoj vrsti tečenja se radi (tabela 6).

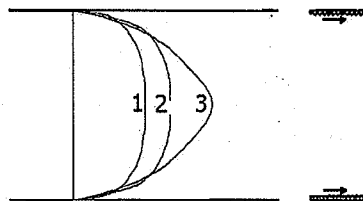
Tabela 6. Kriterij za određivanje vrste tečenja u cijevima

VRSTA TEČENJA	KRITERIJ (USLOV)
Laminarno	$R_e < 2320$
Turbulentno glatko	$2320 < R_e < \frac{1}{2} \frac{D}{e}$
Turbulentno prelazno	$\frac{1}{2} \frac{D}{e} < R_e < 500 \frac{D}{e}$
Turbulentno hrapavo	$R_e \geq 500 \frac{D}{e}$

Laminarno strujanje ili kako se naziva i slojevito strujanje fluida je relativno rijedak slučaj strujanja u praksi. Laminarno strujanje možemo ograničiti na slijedeće vidove, i to:

- strujanje kroz kapilare ili kod većih prečnika cijevi pri izuzetno malim brzinama,
- strujanje podzemnih voda u homogenoj i izotropnoj sredini,
- strujanje kroz filtere, tkanine i slično.

Strujanje iznad vrijednosti Reynoldsovog broja od 2320 je, u praksi, gotovo uvijek turbulentno. Znamo da kod laminarnog strujanja otpor nastaje od samog trenja čestica, dok kod turbulentnog strujanja otpor nastaje uglavnom zbog vrtloženja čestica fluida koje opisuju nepravilne putanje i pri tome ulaze iz jednog sloja u drugi sloj fluida. Karakteristika turbulentnog strujanja je, kao što je već rečeno, veoma nepravilna putanja pojedinih fluidnih čestica te brzina osim u smjeru toka postoji i u bočnim smjerovima (bočne komponente brzine). Takođe, postoji još jedna karakteristika turbulentnog strujanja koja se ogleda u nestacionarnosti, što znači da u nekoj fiksnoj tački dolazi do promjene brzine po smjeru i po veličini. Hrapavost stijenke cijevi utiče na profil brzine u cijevi, jer tzv. izbočine (hrapavost) na stijenama (zidovima) cijevi „koče“ strujanje. To znači da što imamo veću hrapavost stijenke cijevi imamo i veće trenje u kontaktu fluida sa stijenkom cijevi te to dovodi do „zaustavljanja“ čestica fluida. Profil brzine toka kod hrapavih cijevi je strmiji nego kod glatkih cijevi uz istu veličinu protoka fluida (slika 6.12).



Slika 6.12 Profil brzina između paralelnih ploča
1 – glatko staklo 2 – rebrasto staklo 3 – posebno ohrapavljen lim

Važno je znati da u turbulentnom strujanju tangencijalni naponi su tzv. „prividni tangencijalni naponi“, jer ne postoje prema Newtonovom zakonu. Ovakvim naponima uzrok su čestice koje ne „putuju“ samo sa strujom toka fluida nego i u okomitom pravcu. Te čestice ne „putuju“ daleko nego do one udaljenosti koju Prandtl naziva „putem miješanja“. Na samom kraju te udaljenosti čestice se prilagođavaju novoj okolini pa tu i nestaju.

Kao što je ranije navedeno, u inženjerskoj praksi razlikujemo tehničku i hidrauličku hrapavost. Tehnička hrapavost predstavlja određenu visinu neravnina (izbočina) na unutarnjoj strani stijenke (zida) cijevi koja zavisi od vrste materijala od koga je cijev izrađena. Na osnovu toga, u inženjerskoj praksi, imamo tzv. glatke i hrapave cijevi. Glatke cijevi u pogledu tehničke hrapavosti su cijevi izrađene od sintetičkih materijala, staklene cijevi kao i bešavne bakarne cijevi. Međutim, veće trenje pri strujanju fluida imaju cijevi sa hidrauličkom hrapavosti.

6.2.2.6. Hidrodinamički gubici

Bernoullieva jednačina realnog fluida (viskoznan fluid) može se napisati prema izrazu 6.31, gdje za proračun strujanja fluida moramo poznavati posljednji član u tom izrazu (ΔH). Ovaj član predstavlja ukupne gubitke fluidne energije koji se javljaju pri strujanju fluida u određenom cijevnom sistemu. Ukupni gubici predstavljaju zbir svih gubitaka koji se javljaju u pravim cijevima (linijski gubici) i svih gubitaka koji se javljaju na mjestima ugrađenih ventila, zatvarača, skretanja cijevi, račvi, promjene prečnika cijevi i slično (lokalni gubici).

6.2.2.6.1. Linijski gubici fluidne energije

Na veličinu linijskih gubitaka odnosno gubitaka fluidne energije koji nastaju pri strujanju fluida kroz prave dionice cjevovoda utiče čitav niz faktora. Na osnovu ranije navedenih Nikuradseovih eksperimenata utvrđeni su slijedeći faktori, i to:

- prečnik cijevi (D),
- hrapavost unutarnje površine cijevi (e),
- kinematski koeficijent viskoznosti (ν),
- brzine strujanja fluida (v),
- dužina prave dionice cijevi (L).

Na osnovu Reynoldsovih eksperimenata i postavki, Nikuradse je navedene faktore sveo na to da su linijski gubici fluidne energije funkcija relativne hrapavosti (e/D), dužine cijevi (L) i veličine Reynoldsovog broja (R_e).

Prema Nikuradseovim eksperimentima, Darcy je Nikuradseove rezultate postavio u izraz koji je potpuno saglasan sa jednačinom za gubitke energije, odnosno:

$$\Delta H_{lm} = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (6.43)$$

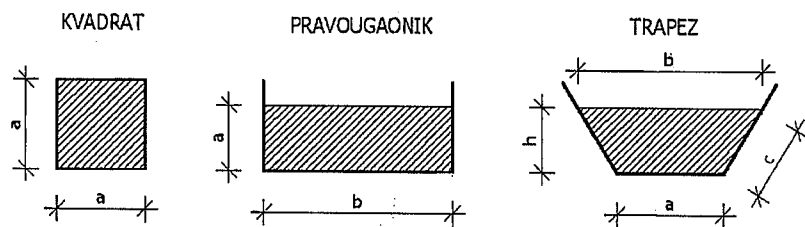
U ovom izrazu λ predstavlja koeficijent trenja za prave dionice cijevi. Određivanje koeficijenta trenja λ objašnjeno je u potpoglavlju „Hidrodinamički otpori“. Prethodni izraz (6.43) odnosi se na cijevi (kružni poprečni presjek) sa prečnikom cijevi D . Međutim, u slučaju da cjevovod nije izveden od cijevi onda je potrebno prvo odrediti Reynoldsov broj na osnovu izraza:

$$R_e = \frac{4vR}{\nu} \quad (6.44)$$

gdje R predstavlja hidraulički radijus, v je srednja brzina strujanja fluida, a ν je kinematski koeficijent viskoznosti. Hidraulički radijus je odnos površine poprečnog presjeka (A) i okvašenog obima (O). Okvašeni obim su strane poprečnog presjeka geometrijskog tijela koje su u kontaktu sa fluidom, odnosno:

$$R = \frac{A}{O} \quad (m) \quad (6.45)$$

Neki od mogućih i karakterističnih poprečnih presjeka često korištenih u građevinskoj hidrotehničkoj praksi prikazani su na slici 6.13.



Slika 6.13 Karakteristični poprečni presjeci strujne cijevi

Prema prethodno prikazanim primjerima (slika 6.13) u tabeli 7 su dati izrazi za određivanje površine poprečnog presjeka (A), okvašenog obima (O) i hidrauličkog radijusa (R).

Tabela 7. Hidraulički radijusi za karakteristične poprečne presjeke

Poprečni presjek	Površina (A)	Okvašeni obim (O)	Hidraulički radijus (R)
KVADRAT	a^2	$4a$	$\frac{a}{4}$
PRAVOUGAONIK	$a \cdot b$	$2b + a$	$\frac{a \cdot b}{2b + a}$
TRAPEZ	$\frac{a+b}{2} \cdot h$	$a + 2c$	$\frac{(a+b) \cdot h}{2(a+2c)}$

6.2.2.6.2. Lokalni gubici fluidne energije

Lokalni gubici fluidne energije stvaraju razne armature (ventili, zatvarači, suženja cijevi, proširenja cijevi i slično) i oni nastaju na vrlo maloj dužini toka tako da prilikom proračuna smatramo da nastaju tačno na mjestu gdje se nalazi određena armatura (u njenoj sredini). Na ovaj način zanemarujemo dužinu lokalnog elementa (vodovodna armatura) pa lokalni gubici zavise od koeficijenta lokalnog gubitka (ξ) i tzv. brzinske visine ($v^2/2g$), odnosno:

$$\Delta H_{lok} = \xi \frac{v^2}{2g} \quad (6.46)$$

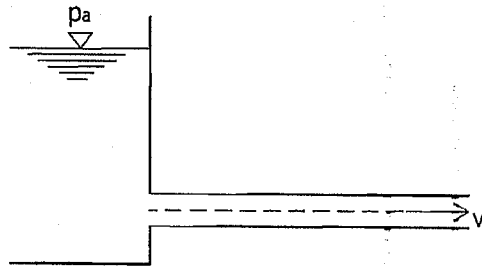
Kod određivanja lokalnih gubitaka fluidne energije uvijek uzimamo brzine koje se javljaju nizvodno od mjesta gdje nastaje taj gubitak. Izuzetak je ulaz tečnosti iz cijevi u rezervoar gdje na mjestu spoja cijevi sa rezervoarom nastaje lokalni gubitak energije, i tada uzimamo brzinu strujanja u cijevi, a ne nizvodnu brzinu (brzinu strujanja u rezervoaru).

Koeficijente lokalnih gubitaka (ξ) uglavnom je teško odrediti tako da postoje eksperimentalni podaci odnosno izmjereni koeficijenti koji se daju u određenim tehničkim priručnicima. Koeficijent lokalnog gubitka (ξ) je veličina data samo za određenu armaturu ispred i iza koje se nalazi odgovarajuća prava cijev dužine najmanje 5 (pet) dužina same promatrane armature.

Međutim, ukoliko se dvije armature (račva i ventil, na primjer) nalaze na veoma maloj udaljenosti jedna od druge, tada se javlja tzv. međudejstvo između njih, te se koeficijent lokalnog gubitka (otpora) skupa za te dvije armature može dobiti samo eksperimentalnim putem.

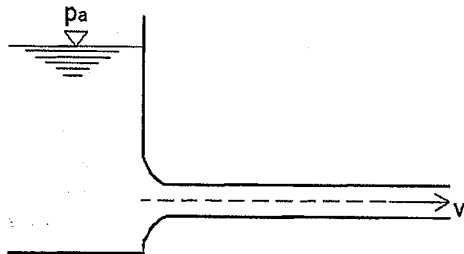
a) Ulaz fluida iz rezervoara u cijev (ulazni otvor)

U ovom slučaju pri određivanju koeficijenta lokalnog gubitka fluidne energije smatra se da je rezervoar dovoljno veliki da brzinu tečenja u njemu možemo zanemariti ili smatrati da je gotovo jednaka nuli ($v \approx 0$).



Slika 6.14 Spoj rezervoara sa cjevovodom sa oštrim rubom (ulaz fluida u cijev)

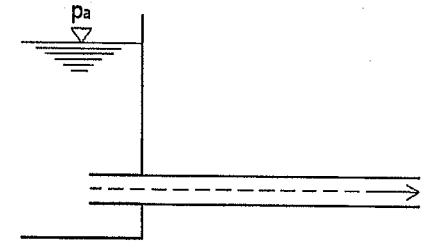
U cjevovode fluidi dopijevaju obično iz nekog rezervoara. Koeficijent lokalnog gubitka za ulazni otvor zavisi od načina kako je cijev spojena (povezana) sa rezervoarom odnosno kako izgleda sam rub tog spoja (ulazni otvor). Najjednostavniji slučaj je kada imamo oštar rub (slika 6.14) i u tom slučaju koeficijent lokalnog gubitka je dosta veliki, ali određenim hidrauličkim oblikovanjem ruba (spoja cijevi sa rezervoarom) on može znatno da se smanji (slika 6.15). Međutim, ukoliko postoji tzv. upuštena cijev u rezervoar kao što je slučaj kada se na kraj upuštene cijevi ugradi zaštitna mrežica, onda dolazi do znatnog povećanja koeficijenta lokalnog gubitka fluidne energije (slika 6.16).



Slika 6.15 Spoj rezervoara sa cjevovodom sa hidraulički zaobljenim rubom (ulaz fluida u cijev)

Kada se izvede zaobljavanje ruba ulaznog otvora onda na osnovu fizikalnih modela odabere se takvo zaobljenje koje će da „prati“ oblik strujnica fluida koje ulaze iz rezervoara u cijev. Pošto zaobljenje „prati“ strujnice fluida kažemo da imamo hidrauličko zaobljenje te se na ovakav način koeficijent lokalnog gubitka može smanjiti ispod vrijednosti 0,01.

U slučaju umetanja cijevi unutar zapremine rezervoara (unutrašnjost rezervoara) dolazi do znatnog povećanja koeficijenta lokalnog gubitka fluidne energije do vrijednosti od 1,0 dok u slučaju ako na takvu upuštenu cijev odnosno na njen kraj ugradimo i zaštitnu mrežicu onda se koeficijent lokalnog gubitka još više povećava i iznosi više od 1,0.



Slika 6.16 Spoj rezervoara sa upuštenom cijevi (ulaz fluida u cijev)

U narednoj tabeli date su vrijednosti koeficijenta lokalnog gubitka fluidne energije za određene oblike ulaznog otvora u funkciji oblika ruba i načina oblikovanja i spajanja rezervoara i cijevi.

Tabela 8. Koeficijenti lokalnog gubitka za određene oblike ulaznih otvora

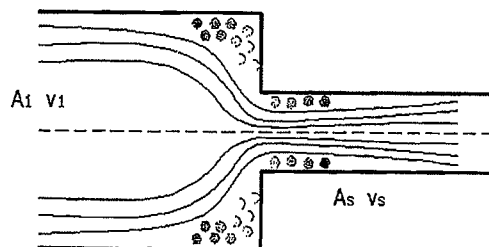
OBLIK ULAZNOG OTVORA	KOEFICIJENT LOKALNOG GUBITKA (ξ)
Oštar rub na stijenci rezervoara	0,50
Oštar rub-upuštena cijev u rezervoar	1,00
Zaobljen rub ($R=0,05D$)	0,22
Zaobljen rub ($R=0,2D$)	0,03
Zaobljen rub-prati strujnicu fluida	0,01

(R – radijus zaobljenja ; D – prečnik cijevi)

b) Suženje cijevi

Kod naglog suženja cijevi javljaju se vrtlozi, jer zbog oštih uglova strujnice fluida koje se nalaze uz rubove cijevi ne mogu „pratiti“ oblik sužavanja cijevi te se odvajaju od stijenke cijevi. Na mjestu između strujnica koje se nalaze pri rubu cijevi i stijenke (zida) cijevi javljaju se veliki vrtlozi pa čak i kavitacija (slika 6.17). Kavitacija predstavlja pojavu naglog isparavanja tečnosti na onim mjestima u strujnom toku gdje je apsolutni pritisak tako mali da se može uporediti sa pritiskom para tečnosti. Kavitacija predstavlja negativnu pojavu koja stvara velike sile i znatno oštećenje stijenki (zidova) cijevi ili općenito oštećenje hidromašinske opreme. U strujnom toku gdje postoji apsolutni pritisak toliko mali da je uporediv sa pritiskom para tečnosti, doći će do isparavanja, te

stvaranja mjehurića vodene pare. Kada takvi mjehurići vodene pare nošeni strujnim tokom dođu do mjesta sa većim pritiskom, doći će do naglog zgušnjavanja i pretvaranja ponovo u tečnost, pa čak i do promjene gustine tečnosti. U suštini, dolazi do izuzetno velikih promjena pritiska i javlja se tzv. tlačni udar koji nanosi velike štete materijalima u cijevnom sistemu.



Slika 6.17 Naglo suženje cjevovoda

Kod ovako oštih rubova cijevi dolazi do suženja ili kontrakcije mlaza tečnosti odnosno presjek stvarnog toka je manji od fizičkog presjeka cijevi, kao što se vidi na slici 6.17. Kontrakciju mlaza tečnosti opisujemo koeficijentom kontrakcije (μ):

$$\mu = \frac{A_s}{A_2} \quad (6.47)$$

gdje je;

A_s – presjek suženog mlaza tečnosti,

A_2 – presjek cijevi nizvodno od suženja.

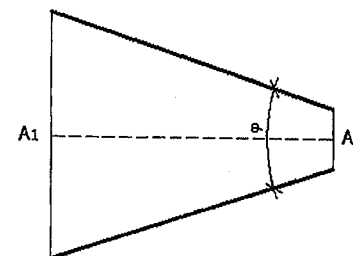
Koeficijent kontrakcije mlaza tečnosti ne može se precizno izračunati, te se određuje pomoću eksperimenata. Pojam jedrtačine kontinuiteta je veoma značajan prilikom određivanja brzine u suženom mlazu. Prema nekim istraživačima, faktor kontrakcije se uključuje u koeficijent otpora i tada proračun brzine se provodi kao da nema suženja odnosno računa se brzina u cijevi dovoljno daleko nizvodno od mjesta gdje se mijenja poprečni presjek cijevi i gdje tečnost ponovo ispuni cijelu cijev. U tabeli 9. dati su koeficijenti lokalnih gubitaka (ξ_1 i ξ_2) u funkciji odnosa poprečnih presjeka cijevi A_2 i A_1 .

Tabela 9. Koeficijenti lokalnih gubitaka energije na mjestu suženja cijevi

A_2/A_1	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ξ_2	0,41	0,38	0,29	0,18	0,09	0,00
ξ_1	41,00	9,40	1,80	0,54	0,16	0,00

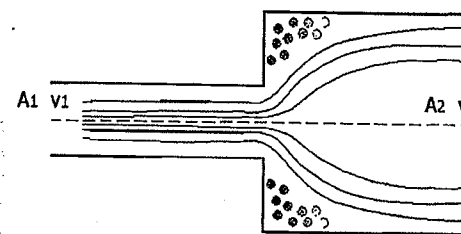
Koeficijent lokalnog gubitka fluidne energije ξ_2 odnosi se na brzinu v_2 u užem presjeku, a koeficijent ξ_1 se odnosi na brzinu v_1 u širem presjeku cijevi.

Da bismo smanjili ili potpuno izbjegli lokalni gubitak na mjestu suženja cijevi, izrađuje se postupno suženje ili konfuzor (slika 6.18). Konfuzor predstavlja konusni dio cijevi i na mjestu konfuzora se javljaju gubici energije samo od trenja koji su opet dosta malih vrijednosti.

Slika 6.18 Konfuzor sa vršnim uglom $\varphi < 60^\circ$

c) Proširenje cijevi

Mjesta proširenja cijevi u hidrotehničkoj praksi nisu tako rijedak slučaj. Na mjestima gdje imamo naglo proširenje cijevi (veći prečnik cijevi) javljaju se i znatni hidraulički gubici (lokalni gubici fluidne energije).



Slika 6.19 Naglo proširenje cjevovoda

Ove koeficijente lokalnih gubitaka je moguće teorijski precizno izračunati i oni se nazivaju Bourda-Carnotovi gubici. Izračunavaju se prema Bourda-Carnotovom izrazu:

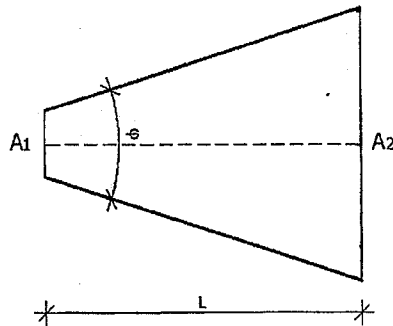
$$\Delta H_{lok} = \frac{(\Delta v)^2}{2g} \quad (6.48)$$

$\Delta v = v_1 - v_2$ predstavlja promjenu brzine koja se javlja prilikom prolaska kroz proširenje, a koeficijente lokalnih gubitaka fluidne energije možemo odrediti prema izrazima:

$$\xi_1 = \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 \quad (6.49)$$

$$\xi_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$$

Slično kao kod naglog suženja cijevi gdje radi smanjenja ili potpunog izbjegavanja lokalnih gubitaka ugrađujemo konfuzor, tako na mjestu naglog proširenja cijevi možemo ugraditi difuzor kao konusni dio cijevi koji znatno smanjuje lokani gubitak fluidne energije. Difuzori za razliku od konfuzora su obično dosta velike dužine, jer kod ugla većeg od 30° dolazi do odvajanja strujnog toka od stijenke cijevi i naglog povećanja lokalnog gubitka.



Slika 6.20 Difuzor

d) Ventili

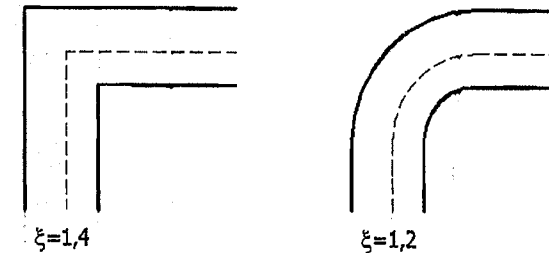
Ventili predstavljaju armature kojima regulišemo protok fluida i pomoću kojih se otvaraju ili zatvaraju određene dionice cjevovoda. Koeficijenti lokalnih gubitaka energije na mjestima ventila određeni su eksperimentalnim putem i zavise od vrste i tipa ventila. Prilikom hidrauličkog proračuna najvažniji su nam minimalni gubici fluidne energije koji će nastati kada je ventil potpuno otvoren, što znači da koeficijenti lokalnih gubitaka fluidne energije zavise i od otvorenosti ventila. U tabeli 10. dati su koeficijenti lokalnih gubitaka na mjestu ugradnje ventila u cijevnom sistemu u ovisnosti od konstrukcije i tipa ventila.

Tabela 10. Koeficijenti lokalnih gubitaka u funkciji tipa i konstrukcije ventila

TIP KONSTRUKCIJE VENTILA	KOEFICIJENT LOKALNOG GUBITKA (ξ)
Slavina (standardni ventil za vodu)	0,60 do 3,90
Kuglasti ventil	0,05 do 0,10

e) Lukovi i koljena

U cijevnim sistemima nastojimo izbjeći oštra koljena radi pojavljivanja velikih pritisaka tako da u praksi koristimo tzv. zaobljena koljena ili lukove (slika 6.21). Lukovi su koljena sa velikim radijusom zakrivljenosti i njihovom primjenom koeficijent lokalnog gubitka, na mjestu njihove ugradnje, može se smanjiti za oko 0,20.



Slika 6.21 Koeficijent lokalnog gubitka za oštro i zaobljeno koljeno

Koljeno predstavlja skretanja neke cijevi bez ikakvih prelaznih zakrivljena, tako da u uglovima koljena se javljaju tzv. mrtvi prostori ili uglovi te dolazi do odvajanja strujnica toka fluida od stijenke cijevi.

Kod luka izvedenog sa velikim radijusom zakrivljenosti ne nastaje odvajanje strujnica toka tečnosti od stijenke cijevi. Međutim, u samoj krivoj strujanja toka javljaju se određeni uticaji centrifugalne sile, kao i kod svakog skretanja. Uticaj centrifugalne sile dovodi čestice fluida do vanjske strane stijenke cijevi te se tu javljaju veći pritisci i nastaje veća brzina toka.

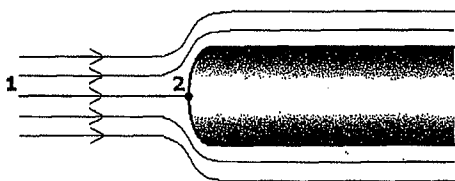
Gubici fluidne energije kod luka predstavljaju zbir gubitaka na trenje i gubitaka skretanja tako da što postoji manji radijus zakrivljenosti luka nastaju i veći gubici skretanja, a gubici na trenje će biti manji pošto je luk kraći (manji radijus zakrivljenosti). Inače, gubici fluidne energije u lukovima malo zavise i od Reynoldsovog broja.

6.3. Primjena Bernoullieve jednačine

Bernoullieva jednačina se može primijeniti u mnogim situacijama i to ne samo kod strujanja fluida u cijevima kao što je do sada bilo riječi o tome. Prikazat će se neki primjeri primjene Bernoullieve jednačine za slučaj mjerenja protoka vode iz rezervoara, mjerenje pritica u cijevnom sistemu kao i kod otvorenih kanala.

6.3.1. Pitotova cijev

Ukoliko tok nekog fluida ili bolje rečeno neke tečnosti, struji jednolikom brzinom oko nekog tijela koje se nalazi u strujnom toku, onda strujnice tečnosti na tom mjestu izgledaju kao na slijedećoj slici.



Slika 6.22 Strujnice oko čvrstog tijela

Sa slike 6.22 može se vidjeti da na mjestu položaja tijela u strujnom toku, jedan dio strujnica se premješta sa gornje, a drugi dio sa donje strane tijela. Jedna strujnica koja se nalazi u središtu tog tijela se zaustavlja (tačka 2). Na tom mjestu (tačka 2) brzina strujanja je jednaka nuli odnosno tečnost se ne kreće na tom mjestu. Ovu tačku nazivamo tačkom stagnacije. Na osnovu Bernoullieve jednačine jednostavno se može izračunati pritisak na tom mjestu (tačka 2). Primijenimo Bernoullievu jednačinu duž središnje strujnice od tačke 1 gdje je brzina v_1 i pritisak p_1 , do tačke 2 (tačka stagnacije ili zaustavna tačka) gdje je brzina $v_2=0$. Takođe, uzмимо da su geodetski položaji tačaka središnje strujnice $z_1=z_2$. Prema ovome može se napisati slijedeći oblik Bernoullieve jednačine:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (6.50)$$

Odnosno, na osnovu prethodno navedenog ($z_1=z_2$ i $v_2=0$) dobija se slijedeći oblik Bernoullieve jednačine:

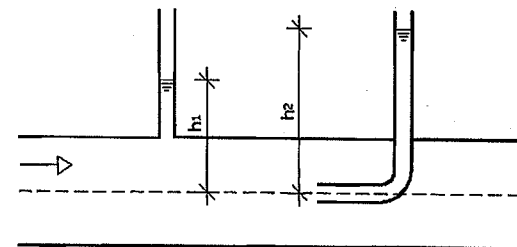
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} \Rightarrow p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \quad (6.51)$$

Ovo povećanje pritiska u tački 2 (tačka stagnacije ili zaustavna tačka) u odnosu na promatranu tačku 1 gdje je brzina strujnice fluida različita od nule, nazivamo dinamičkim pritiskom.

Dinamički pritisak jednak je $\frac{1}{2} \rho v_1^2$ ili napisano u obliku visine pritiska

$$\left(h = \frac{p}{\rho g} \right).$$

Ako imamo dva pijeometra, kao na slici 6.23, i to jedan pijeometar kao „obični“ i drugi kao Pitotova cijev, onda se može odrediti brzina toka u cijevi.



Slika 6.23 Pitotova cijev i pijeometar

Primjenjujući navedenu teoriju može se napisati jednačinu pritiska p_2 primjenjujući izraz 6.51:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$$\rho g h_2 = \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \quad (6.52)$$

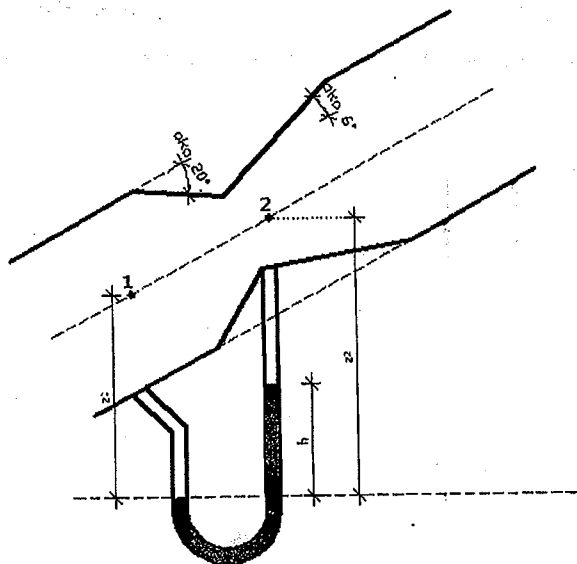
Sređivanjem prethodnog izraza može se odrediti brzina strujnog toka tečnosti u obliku:

$$v = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} \quad (6.53)$$

Znači, određena je brzina strujnog toka prema dva mjerenja pritiska i uz primjenu Bernoullieve jednačine.

6.3.2. Venturijeva cijev (Venturimetar)

Venturijeva cijev je uređaj za mjerenje razlike pritiska u dva promatrana presjeka. Na slici 6.24 prikazana je Venturijeva cijev u jednom dijelu cjevovoda pod uglom u odnosu na horizontalnu ravan. Sastoji se od suženog presjeka cijevi koji povećava brzinu toka, a time smanjuje pritisak kao i dijela cijevi koja postepeno se vraća na prvobitne dimenzije (presjek) cijevi u vidu difuzora. Ovo je posebno tačna metoda mjerenja protoka tečnosti zasnovana na mjerenju razlike pritiska u tačkama ispred suženja cijevi i u suženju cijevi (slika 6.24).



Slika 6.24 Venturimetar

Primjenom Bernoullieve jednačine duž strujnice od tačke 1 do tačke 2 (uski dio cijevi) u Venturimetru, imamo:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (6.54)$$

Primjenom jednačine kontinuiteta može se eliminisati brzina u tački 2 (v_2), odnosno:

$$Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \quad (6.55)$$

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot A_1}{A_2} \quad (6.56)$$

Uvrštavajući ovo u Bernoullievu jednačinu dobija se:

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] \quad (6.57)$$

Iz prethodnog izraza se može napisati izraz za brzinu u tački 1 u obliku:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g \left[\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 \right]}{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1}} \quad (6.58)$$

Da bismo dobili teoretsku veličinu protoka pomnožit ćemo brzinu toka u tački 1 sa površinom poprečnog presjeka u toj tački, odnosno da bi dobili aktuelni protok uzimamo u obzir gubitke zbog trenja te uključujemo koeficijent korekcije:

$$Q_{id} = v_1 \cdot A_1 \quad (6.59)$$

$$Q_{akt} = C_d \cdot Q_{id} = C_d \cdot v_1 \cdot A_1 \quad (6.60)$$

$$Q_{akt} = C_d \cdot A_1 \cdot A_2 \sqrt{\frac{2g \left[\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 \right]}{A_1^2 - A_2^2}} \quad (6.61)$$

To se može izraziti i u smislu očitavanja manometra:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho_{man} g h + \rho g (z_2 - h) \quad (6.62)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = h \left(\frac{\rho_{man}}{\rho} - 1 \right) \quad (6.63)$$

Na osnovu prethodnih izraza može se napisati:

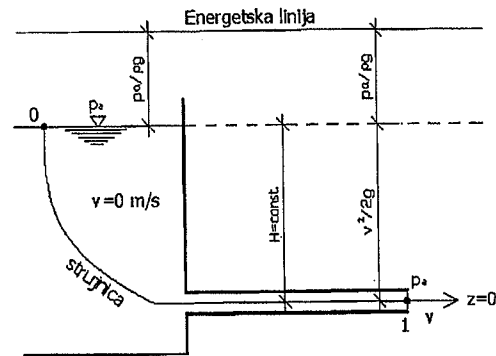
$$Q_{akt} = C_d \cdot A_1 \cdot A_2 \sqrt{\frac{2gh \left[\frac{\rho_{man}}{\rho} - 1 \right]}{A_1^2 - A_2^2}} \quad (6.64)$$

Može se primjetiti kako prethodni izraz ne uključuju bilo kakve uslove položaja z_1 ili z_2 u Venturimetru. Svrha difuzora u Venturimetru je da osigura postupno i ravnomjerno usporavanje nakon suženja. Ovo je dizajnirano kako bi se osiguralo da pritisak ponovo naraste blizu originalne vrijednosti prije Venturimetra. Ugao difuzora u Venturimetru iznosi obično između 6 i 8°. Ako je ugao manji od ovih

vrijednosti, mjerač (Venturimetar) postaje jako dug i gubici pritiska bi bili značajni.

6.3.3. Istjecanje iz velikog rezervoara

Ukoliko pretpostavimo da imamo veliki rezervoar, onda na njegovoj slobodnoj površini brzina strujanja tečnosti će biti veoma mala. Pri dnu tog velikog rezervoara postoji cijev kojom tečnost istječe iz njega. Brzina strujanja tečnosti se povećava približavanjem ulasku u cijev. Visina ukupne energije u rezervoaru je jednaka piježometarskoj visini, koja je jednaka u svim tačkama velikog rezervoara za slučaj mirovanja tečnosti.



Slika 6.25 Istjecanje tečnosti iz velikog rezervoara

Za ovakav slučaj Bernoullieva jednačina se može postaviti od bilo koje tačke u rezervoaru, a najjednostavnije je ako se postavi promatrajući dva presjeka (tačke), i to tačku 0 koja se nalazi na slobodnoj površini tečnosti u rezervoaru i tačke 1 koja se nalazi na izlazu tečnosti iz cijevi. Bernoullieva jednačinu u tom slučaju može se napisati u obliku, uzimajući za referentnu ravan osovinu cijevi spojene na veliki rezervoar:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \quad (6.65)$$

Pošto se radi o velikom rezervoaru u kome tečnost gustine ρ miruje i na čijoj površini tečnosti vlada atmosferski pritisak, a na mjestu istjecanja tečnosti iz cijevi vlada, takođe, atmosferski pritisak te uz uslov položaja referentne ravni, može se napisati:

$$\frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} = 0 \quad ; \quad \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} = 0 \quad ; \quad z_0 = H \quad ; \quad z_1 = 0$$

Na osnovu ovoga Bernoullieva jednačina iz izraza 6.65 dobija slijedeći izgled:

$$H + 0 + 0 = 0 + \frac{v_1^2}{2g} \quad (6.66)$$

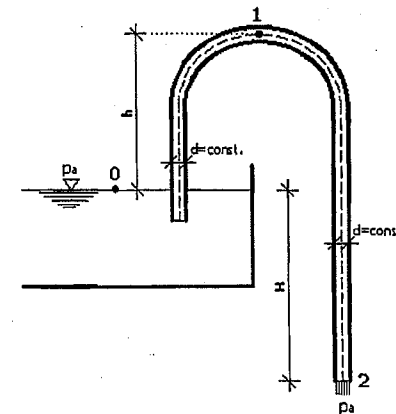
$$H = \frac{v_1^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = 2gH$$

$$v_1 = \sqrt{2gH} \quad (6.67)$$

Na osnovu prethodnih izraza može se zaključiti da potencijalna energija iz rezervoara se pretvorila u kinetičku energiju u tački 1 odnosno na izlazu tečnosti gustine ρ iz cijevi spojene na rezervoar.

6.3.4. Sifon

Da bi se omogućilo tečenje kroz sifon potrebno je da je cijev u početnom trenutku ispunjena vodom ili treba ostvariti podpritisak na kraju cijevi, kao što je prikazano na slici 6.26.



Slika 6.26 Tečenje kroz sifon.

Ako postavimo Bernoullievu jednačinu za presjeka 0 i 2 odnosno za tačke 0 i 2, mogu se napisati slijedeći izrazi, uz konstataciju sa slike da u tački 0 vlada atmosferski pritisak i da tečnost miruje, a na izlazu iz cijevi (sifona) u tački 2 vlada takođe atmosferski pritisak (tečnost iz sifona struji u atmosferu).

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (6.68)$$

Uvažavajući do sada rečeno uz uslov da referentna ravan prolazi kroz tačku 0, imamo:

$$z_0 = 0 ; \frac{p_0}{\rho g} = 0 ; \frac{v_0^2}{2g} = 0 ; \frac{p_2}{\rho g} = 0$$

Izraz 6.68 može da se napiše u obliku:

$$0 + 0 + 0 = -H + 0 + \frac{v_2^2}{2g} \text{ odnosno } 0 = -H + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow H = \frac{v_2^2}{2g} \quad (6.69)$$

Odavde se dobija izraz za brzinu tečenja u tački 2 koji glasi:

$$v_2^2 = 2gH \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gH} \quad (6.70)$$

Pošto je prečnik cijevi (sifona) konstantan ($d = const$) onda su brzine v_1 i v_2 jednake ($v_1 = v_2$).

Da bismo odredili veličinu pritiska u tački 1 koja predstavlja najvišu tačku sifona, postaviti ćemo Bernoullievu jednačinu za tačke 0 i 1, te imamo slijedeći izraz:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \quad (6.71)$$

Uvažavajući dosadašnje konstatacije može se napisati:

$$0 + 0 + 0 = h + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \text{ odnosno } 0 = h + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \quad (6.72)$$

U tački 1 vlada određeni pritisak, jer tečnost struji kroz cijev odnosno sifon, a postoji i brzina tečenja koju označavamo sa v_1 .

Izraz 6.72 možemo srediti pa dobijamo slijedeće:

$$\frac{p_1}{\rho g} = -h - \frac{v_1^2}{2g} \quad (6.73)$$

Umjesto brzine strujanja v_1 i uz uslov $v_1 = v_2$, pisat ćemo izraz 6.70, te imamo:

$$\frac{p_1}{\rho g} = -h - \frac{2gH}{2g} \Rightarrow \frac{p_1}{\rho g} = -h - H \quad (6.74)$$

Iz izraza 6.74 dobit ćemo vrijednost pritiska u tački 1 (najviša tačka sifona), i to:

$$p_1 = -\rho g \cdot (h + H) \quad (6.75)$$

Naime, podizanjem tačke 1 (najviša tačka sifona) ili spuštanjem izlaznog kraja sifona (tačka 2) smanjujemo pritisak u tački 1 (p_1). Ovaj pritisak (p_1) mora biti veći od pritiska para da ne bi došlo do pojave kavitacije, jer pojavom kavitacije prekinulo bi se tečenje kroz sifon.

6.4. Hidraulički proračun cjevovoda

Ovdje se razmatraju proračuni jednostavnih cijevnih sistema sa jednom ili dvije dionice odnosno tzv. grane cjevovoda. Prilikom proračuna treba biti pažljiv, jer napravljena greška na početku proračuna odrazit će se na cjelokupan hidraulički proračun, što u konačnici dovodi do pogrešnih rezultata i vrijednosti veličina koje proračunavamo (protok tečnosti, brzina tečenja, pritisak na određenom mjestu i slično). Naravno, da bismo počeli sa određenim proračunom cjevovoda prvo moramo imati odgovarajući skicu ili nacrt izgleda tog sistema sa potrebnom geometrijom (dužine cijevi, prečnici, položaji mjesta gdje nastaju određeni lokalni gubici pri tečenju itd.) kao i visinske kote. Veoma je važno poznavati uslove na ulazu tečnosti iz rezervoara u cijev kao i uslove na izlazu tečnosti iz cijevi (uticanje u drugi rezervoar, istjecanje u atmosferu). Poznavajući navedene uslove ili dio potrebnih uslova, možemo početi sa proračunom jednog jednostavnog cijevnog sistema. Da bismo proračun mogli pravilno uraditi moramo poznavati određene zakonitosti o kojima je već napisano u prethodnim poglavljima, kao što je jednačina kontinuiteta (izraz 5.34), Bernoullieva jednačina (izraz 6.31) kao i proračun linijskih (izraz 6.43) i lokalnih gubitaka energije (izraz 6.46) uz poznavanje primjene Moodyevog dijagrama i tablica koeficijenata lokalnih gubitaka u zavisnosti od vrste armature i oblika cijevi.

Znači, treba da poznajemo priličan broj podataka o određenom cijevnom sistemu pri čemu neke od tih veličina je potrebno izračunati. Podaci ili veličine koje moramo poznavati ili ih izračunati su Reynoldsov broj (Re), protok tečnosti (Q), brzina strujanja u funkciji prečnika cijevi (v), dužina cjevovoda (L), prečnik cijevi (D), koeficijent linijskog gubitka pri strujanju (tečenju) kroz prave dionice cijevi (λ), koeficijenti lokalnih gubitaka na određenim mjestima na cjevovodu kao što su ventili, zatvarači, suženja ili proširenja cijevi, koljena, spoj cijevi sa rezervoarom i slično (ξ), kinematski koeficijent viskoznosti (ν) itd. Posebno je bitna veza i odnos između koeficijenta linijskog gubitka (λ) i Reynoldsovog broja (Re) koji zavise od hrapavosti cijevi, te je za njihovo proračunavanje potrebno poznati brzinu tečenja. Uglavnom, u hidrotehničkoj praksi je poznata dužina određenih dionica cjevovoda, dok se u proračunima traži određivanja protoka (Q), brzine tečenja (v) ili potrebnog prečnika cijevi (D) kao i ukupnih gubitaka energije pri strujanju tečnosti (ΔH). U zavisnosti koje veličine su nam poznate proračun možemo provoditi na više načina.

6.4.1. Hidraulički proračun uz poznavanje protoka Q i prečnika cijevi D

Kada je poznat protok kroz cijevni sistem i prečnik cijevi, proračun je dosta jednostavan. Na osnovu jednačine kontinuiteta odredi se brzina tečenja u cijevi, odnosno:

$$Q = A \cdot v \Rightarrow v = \frac{Q}{A} \Rightarrow v = \frac{Q}{\frac{D^2 \pi}{4}} \quad (6.76)$$

odnosno
$$v = \frac{4Q}{D^2 \pi} \quad (6.77)$$

Na osnovu poznate brzine tečenja u cijevi konstantnog ili promjenjivog prečnika odredi se Reynoldsov broj (izraz 5.3) uz prethodno poznavanje kinematskog koeficijenta viskoznosti ili poznavanje temperature tečnosti iz koje možemo odrediti kinematski koeficijent viskoznosti (za različite temperature vode date su vrijednosti kinematskog koeficijenta viskoznosti u tabeli 2 – potpoglavlje 3.3.3.). Potom se računaju gubici koji nastaju tokom strujanja tečnosti određene gustine (linijske i lokalne gubitke energije). Na kraju se može pristupiti crtanju energetske i pijezometarske linije datog sistema.

6.4.2. Hidraulički proračun uz poznavanje protoka Q i brzine tečenja v

Slučaj kada su nam poznati protok tečnosti Q i brzina tečenja je, takođe, dosta jednostavan. Brzina tečenja može biti zadata kao najveća dopuštena, minimalna brzina tečenja ili kao određena brzina tečenja koja je najpovoljnija za dati sistem. Na osnovu jednačine kontinuiteta, uz poznat protok tečnosti Q i brzinu tečenja v određuje se potreban prečnik cijevi, odnosno:

$$Q = A \cdot v \Rightarrow A = \frac{Q}{v} \Rightarrow \frac{D^2 \pi}{4} = \frac{Q}{v} \quad (6.78)$$

$$D^2 \pi \cdot v = 4Q \Rightarrow D^2 = \frac{4Q}{\pi \cdot v} \quad (6.79)$$

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi \cdot v}} \quad (6.80)$$

Nakon izračunatog potrebnog prečnika cijevi iz izraza 6.80, prema tablicama proizvođača cijevi proizvedenih od određenog materijala, odaberemo prvi veći postojeći prečnik cijevi, te izračunamo brzinu tečenja za taj usvojeni prečnik cijevi. Potom se izračunaju gubici nastali pri tečenju (linijski i lokalni gubici energije) i crta se energetska i pijezometarska linija zadatog sistema.

6.4.3. Hidraulički proračun uz poznavanje prečnika cijevi D i brzine v

U jednom sistemu između, na primjer, dva rezervoara ili istjecanje tečnosti iz rezervoara, protok Q je nepromjenjiv pa na osnovu jednačine kontinuiteta može se napisati:

$$Q = A \cdot v \Rightarrow Q = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot v \quad (6.81)$$

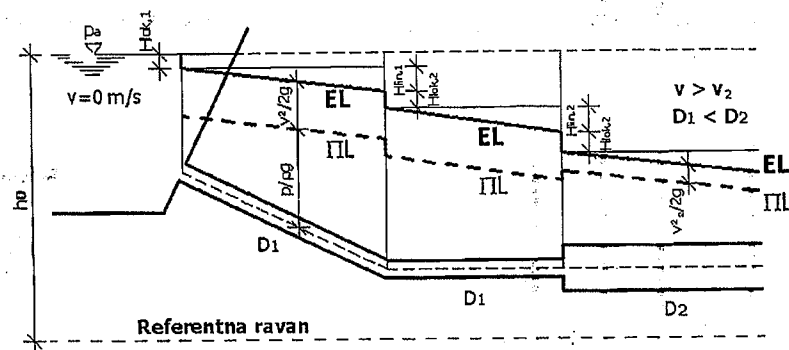
Ukoliko imamo različite prečnike cijevi, shodno jednačini kontinuiteta mogu se odrediti i brzine tečenja u tim cijevima, a nakon poznatih brzina tečenja moguće je odrediti Reynoldsov broj uz prethodno poznavanje kinematskog koeficijenta viskoznosti ν . Nakon toga, određuju se linijski i lokalni gubici energije u sistemu i pristupa se crtanju energetske i pijezometarske linije datog sistema.

6.5. Crtanje energetske i pijezometarske linije

Nakon urađenog proračuna nekog cijevnog sistema, uz poznavanje potrebnih veličina kao što su brzina tečenja i prečnici cijevi, može se nacrtati linija energije (E) i linija pritiska ili pijezometarska linija (II), uz prethodno određivanje linijskih i lokalnih gubitaka energije.

Na određeni sistem cjevovoda prvo se odabere i nacrtaju linije referentne ravni i nanose se tzv. pomoćne linije na mjestima ulaska tečnosti iz rezervoara u cijev, na mjestima svih armatura koje se nalaze na cijevnom sistemu, na mjestima suženja i proširenja cijevi, na mjestima koljena kao i na mjestu ulaska tečnosti iz cijevi u neki drugi rezervoar. Naime, ukoliko imamo da iz cijevnog sistema tečnost (uglavnom voda kojom se najviše bavimo u građevinskoj hidrotehničkoj praksi) slobodno ističe u atmosferu onda referentnu ravan postavljamo u osu te izlazne cijevi. Kod, na primjer, uticanja tečnosti iz cijevi u rezervoar odnosno kod uticanja ispod površine tečnosti koja se nalazi u rezervoaru, referentna ravan je nivo vode u tom rezervoaru. Crtanje energetske (E) i pijezometarske (II) linije obavlja se u odnosu na osu cijevi.

Uzmimo za primjer, početak crtanja energetske (E) i pijezometarske linije (II) u slučaju ulaska tečnosti iz rezervoara u cijev, kao što je prikazano na slici 6.27. Na slici se vidi da je cijev spojena sa rezervoarom te na osnovu ranije navedenog na tom mjestu postoji određeni lokalni gubitak energije. Poseban slučaj je kada imamo upuštenu cijev u rezervoar gdje na vrhu cijevi se ugrađuje zaštitna mreža ili korpa te se na tom mjestu javlja lokalni gubitak ulaznog otvora.



Slika 6.27 Početak crtanja E i II linije kada tečnost ulazi iz rezervoara u cijev

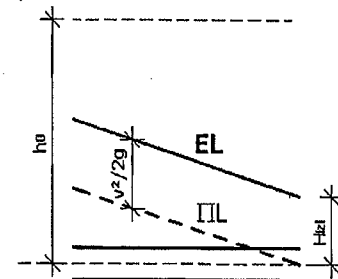
Radi preglednosti energetske i pijezometarske linije potrebno je sistem nacrtati u odgovarajućoj razmjeri, a mjerilo ordinata je obično drugačije od mjerila za apcisu. Crtanje energetske i pijezometarske linije se počinje u smjeru tečenja odnosno od početka „ulaska“ tečnosti iz rezervoara u cijev (slika 6.27) uz već navedeno prethodno crtanje tzv. pomoćnih vertikalnih linija na mjestima vodovodnih armatura, suženja ili proširenja cijevi, koljena i slično. Kod otvorenih rezervoara, kao na slici 6.27, na vodnoj površini pritisak i brzina tečenja su jednaki nuli (na površini tečnosti vlada atmosferski pritisak), odnosno smatramo da voda miruje u rezervoaru i od nivoa vode u rezervoaru počinjemo crtati liniju energije. Ukoliko se radi o zatvorenoj posudi u kojoj vlada određeni nadpritisak ili podpritisak onda nivou vode u rezervoaru moramo dodati (nadpritisak) ili oduzeti (podpritisak) za veličinu pritiska koji vlada u takvoj zatvorenoj posudi. Sa slike 6.27 vidi se da na ulazu tečnosti u cijev linija energije odmah ima odgovarajući skok koji zavisi od veličine lokalnog gubitka energije na tom mjestu odnosno od veličine koeficijenta lokalnog gubitka (ξ_l) i nizvodne brzine tečenja v_l (brzina u cijevi „l“ – $H_{lok,1}$). Potom od veličine $H_{lok,1}$ povlači se pomoćna horizontalna linija na cijeloj dužini prave cijevi (sve do pojave novog lokalnog gubitka energije-koljeno na cijevi) i na već dobijenu veličinu $H_{lok,1}$ na kraju prave cijevi dodajemo veličinu linijskog gubitka ($H_{lin,1}$) na toj dužini prave cijevi. Veličina linijskog gubitka energije $H_{lin,1}$ zavisi od koeficijenta trenja cijevi (λ) koji zavisi od vrste tečenja i materijala od koga je cijev izrađena kao i od dužine prave cijevi, njenog prečnika i brzine tečenja na toj pravoj dionici konstantnog poprečnog presjeka, uz uzimanje u obzir ubrzanja sile teže (g). Na toj vertikalnoj pomoćnoj liniji odnosno na do sada sračunatim gubicima energije ($H_{lok,1}$ i $H_{lin,1}$) neposredno blizu nizvodno od koljena dodajemo novi lokalni gubitak energije ($H_{lok,2}$) koji zavisi od koeficijenta lokalnog gubitka ($\xi_{koljena}$) i nizvodne brzine tečenja u cijevi (nizvodno od koljena). Zatim se povuče pomoćna horizontalna linija od veličine dosadašnjih gubitaka energije duž prave cijevi do novog lokalnog gubitka energije kao što je

proširenje cijevi prikazano na slici 6.27. Crtanje gubitaka energije se odvija na već opisani način.

Nakon što smo nacrtali energetska liniju počinjemo sa crtanjem linije pritiska ili pijezometarske linije. Pijezometarska linija je paralelna energetska liniji i za veličinu brzinske visine ($v^2/2g$) nalazi se ispod energetske linije. Potrebno je

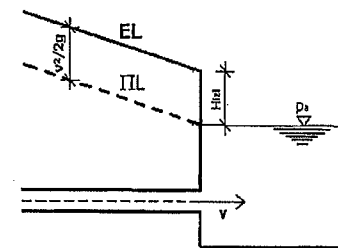
poznavajući brzine tečenja u cijevnom sistemu odrediti brzinske visine i onda početi sa crtanjem pijezometarske linije u odgovarajućoj razmjeri koju smo usvojili i za energetska liniju. Crtanje pijezometarske linije počinje od početka tečenja (na primjer od „ulaska“ tečnosti iz rezervoara u cijev kao što je prikazano na slici 6.27). Na mjestu ulaska tečnosti iz rezervoara u cijev dolazi do spuštanja pijezometarske linije, a to skokovito opadanje linije pritiska je u direktnoj vezi sa brzinom tečenja koja je nizvodna odnosno koja je u cijevi.

Ako promatramo kraj cijevi u nekom sistemu gdje tečnost ističe u atmosferu kao na slici 6.28, onda je energetska linija iznad ose kraja cijevi za veličinu lokalnog gubitka energije odnosno za veličinu H_{izl} koja zavisi od koeficijenta lokalnog gubitka na izlazu i brzine tečnosti u cijevi. Kod realnih tečnosti energetska linija uvijek opada u smjeru tečenja, jer se pojavljuju otpori tečenju i nastaju gubici (linijski i lokalni gubici).



Slika 6.28 Završetak crtanja E i II linije kada tečnost slobodno ističe iz cijevi

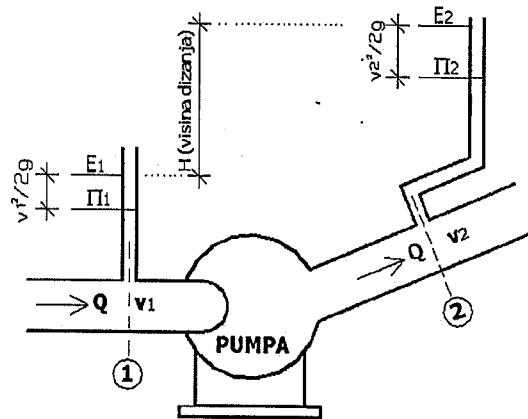
U slučaju kada u sistemu imamo istjecanje tečnosti iz cijevi u neki rezervoar i kada je to istjecanje ispod nivoa tečnosti u tom rezervoaru, onda energetska i pijezometarska linija izgledaju kao na slici 6.29.



Slika 6.29 Završetak crtanja E i II linije kada tečnost ističe ispod nivoa tečnosti u rezervoaru

6.6. Pumpe

Pumpe predstavljaju hidrauličke mašine kojim povećavamo mehaničku energiju fluida na način što energiju sa obrtnog kola pumpe prenosimo na fluid. Pumpe, u stvari, dodaju energiju tečnostima dok u tom slučaju ne mijenjaju proticaj tečnosti, što znači da vrijedi jednačina kontinuiteta. Prilikom proračuna primjenjuje se tzv. idealna pumpa, koja na mjestu gdje je postavljena podiže liniju energije za veličinu koju zovemo energetska visina pumpe.



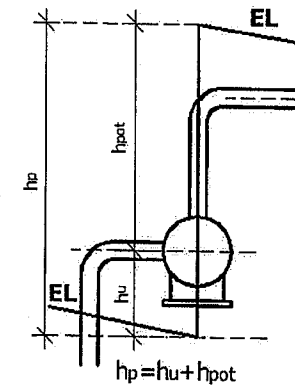
Slika 6.30 Linija energije i linija pritiska ispred i iza pumpe

Na slici 6.30 prikazana je pumpa sa energetsom i piježometarskom linijom neposredno ispred i iza pumpe. Vidi se da visinska razlika H predstavlja razliku energetske visine ispred i iza pumpe, te se može napisati:

$$H = E_2 - E_1 \quad (6.82)$$

Veličina H naziva se visinom dizanja fluida.

Svaka pumpa ima usisni i potisni dio, jer pumpa „uvlači“ tečnost na usisnom vodu i podiže energiju tečnosti za visinu h_u (usisna visina). Zatim, pumpa potiskuje tečnost na potisnom vodu dalje u cijevni sistem. Ukupno povećanje energetske visine jednako je zbiru usisne i potisne visine ($h_u + h_{pot}$), a u funkciji karakteristika i konstrukcije pumpe, visina na koju pumpa „podigne“ tečnost na usisnom vodu može biti različita (slika 6.31). Bitno je da na usisnom vodu se ne smije desiti da apsolutni pritisak padne ispod pritiska para tečnosti, jer tada dolazi do prekidanja strujanja tečnosti i pumpa neće moći vršiti svoju funkciju. Na ovo moramo biti obazrivi kada je usisni vod u rezervoaru.

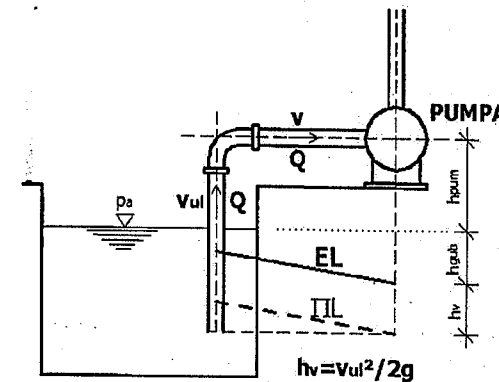


Slika 6.31 Pumpa sa usisnom i potisnom visinom

Kada se promatra usisni vod, onda visina dizanja na usisnom vodu odgovara zbiru visine pumpe odnosno visine od osovine pumpe do nivoa vode (h_{pum}), zatim visini gubitaka koji se javljaju u usisnoj cijevi (h_{gub}) i tzv. brzinske visine na usisnom vodu (h_v), odnosno:

$$h_u = h_{pum} + h_{gub} + h_v \quad (6.83)$$

Grafički to izgleda kao na slici 6.32.



Slika 6.32 Usisna visina podizanja tečnosti

Snaga pumpe (N) zavisi od gustine fluida koji trebamo „podići“ sa niže na višu kotu što je čest slučaj kod vodovodnih sistema, potom zavisi od količine fluida (Q) koji „podizemo“ na određenu visinu, od visine dizanja fluida (H) i od ubrzanja sile Zemljine teže (g).

Snaga pumpe može se napisati kao:

$$N = \frac{\rho g Q H}{\eta} \quad (6.84)$$

gdje je:

η - koeficijent iskoristivosti pumpe i uvijek je $\eta < 1$.

Obično koeficijent iskoristivosti pumpe je manji od 80% ($\eta < 0,8$).

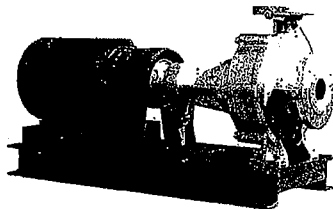
Kao i kod tečenja fluida u cijevnom sistemu, tako i kod pumpe nastaju određeni gubici energije čiji uzrok su uglavnom:

- trenje i lokalni gubici (hidraulički gubici pumpe),
- trenje u ležajevima pumpe.

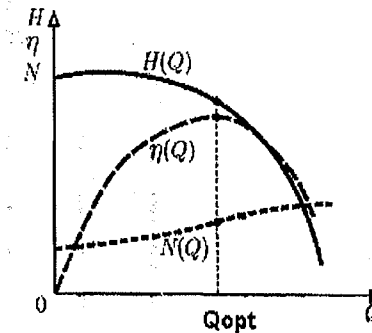
6.6.1. Centrifugalna pumpa

Kod centrifugalne pumpe fluid ili bolje rečeno tečnost ulazi kroz usisni dio odnosno tečnost protiče od smjera tečenja prema tlačnoj strani usljed dejstva centrifugalne sile. Prilikom prolaska tečnosti kroz usisni dio koji je kolinearan sa osom radnog kola, tečnost usljed obrtanja radnog kola prolazi kroz njega i stiže u tzv. spiralu u kojoj se tečnost sakuplja te potom dolazi u potisni dio i odlazi iz pumpe. U suštini, centrifugalna pumpa se sastoji od rotora i spiralnog kućišta. Rotor je pričvršćen na tzv. vratilu, a kada se rotor vrti velikom brzinom tada se potiskuje tečnost koja se nalazi između lopatica pumpe, pa djelovanjem centrifugalne sile tečnost povećava svoju brzinu koja se znatnim dijelom pretvara u pritisak. Centrifugalne pumpe su pogodne za svaku namjenu izuzev za male količine tečnosti i tečnosti koje imaju male brzine, kao i za tečnosti sa velikim viskozitetom. Centrifugalne pumpe mogu biti jednostepene i višestepene, a kućište im je izvedeno uglavnom od ljevanog željeza. Ove pumpe zauzimaju malo prostora, a održavanje je prilično jeftino. Iz tih razloga, kao i zbog specifične energije imaju dosta veliku primjenu u hidrotehničkoj praksi.

U hidrotehničkoj praksi postoje tzv. karakteristike centrifugalne pumpe koje govore o međusobnim odnosima veličina H , N i η prema količini tečnosti Q koju treba „podići“ na određenu višu kotu. Ove karakteristike su izmjerene pri konstantnom obrtaju radnog kola.

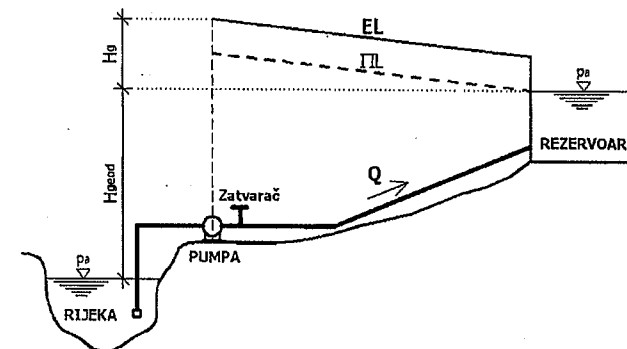


Slika 6.33 Centrifugalna pumpa



Slika 6.34 Karakteristike centrifugalne pumpe

Ako uzmemo jedan primjer na kome se nalazi jedan vodotok (rijeka), cijevni sistem, pumpa i rezervoar koji se nalazi na višoj koti od kote vodotoka (slika 6.35). U ovom slučaju, pošto postoji pumpa koja je povezana na cjevovod ostvariće se proticaj Q koji će zavisiti između ostalog od karakteristika pumpe i položaja rezervoara.



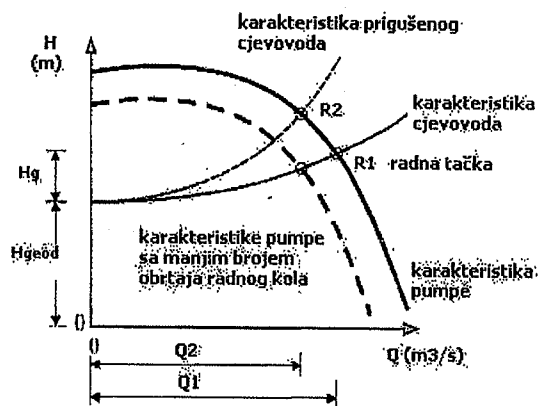
Slika 6.35 Podužni presjek cjevovoda, pumpe i rezervoara

Kada je potrebno da se ostvari protok Q , prema slici 6.35, onda moramo postići ukupnu visinu dizanja koja predstavlja sumu H_{geod} i H_g . H_{geod} je geodetska visina dizanja koja predstavlja visinsku razliku nivoa vode u vodotoku ili rijeci naspram nivoa vode u rezervoaru. H_g predstavlja gubitak energije po jedinici težine koji nastaju trenjem u cijevi usisnog i potisnog dijela kao i od određenih lokalnih gubitaka na sistemu.

U slučaju burnog odnosno turbulentnog tečenja vrijedi slijedeći odnos:

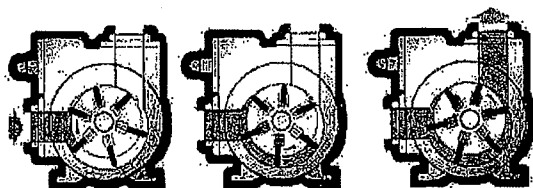
$$H_g = H_g(Q^2) \quad (6.85)$$

Izraz 6.85 predstavlja karakteristiku cjevovoda i to je kvadratna parabola.



Slika 6.36 Karakteristike pumpe i cijevnoga sistema sa radnim tačkama

Na slici 6.36 date su karakteristike pumpe i cijevnoga sistema. Sa slike se vidi da se krive karakteristika pumpe sijeku sa krivom koje karakterišu cijevnoga. To je tačka $R1$ koja predstavlja radnu tačku pumpe za cijevnoga datih karakteristika. Uočljivo je sa slike da se protok $Q1$ ostvaruje za visinu dizanja tečnosti koja odgovara zbiru H_{geod} i H_g . Ukoliko je protok $Q1$ veći od potrebnog protoka $Q2$ možemo iskoristiti zatvarač na potisnom vodu. Zatvaranjem tog zatvarača (slika 6.35) povećavaju se lokalni gubici energije. Tada je karakteristika tog tzv. prigušenog cijevnoga određena drugom krivom odnosno drugom kvadratnom parabolom (prikazana crtkanom linijom na slici 6.36). Ta linija se sa linijom (krivom) karakteristika pumpe siječe u tački $R2$ koja je radna tačka (druga radna tačka) kojoj odgovara potreban protok $Q2$. Naime, isti potreban protok $Q2$ može se dobiti ukoliko se smanji broj obrtaja pumpe, a bez povećanja lokalnih gubitaka (bez korištenja zatvarača).



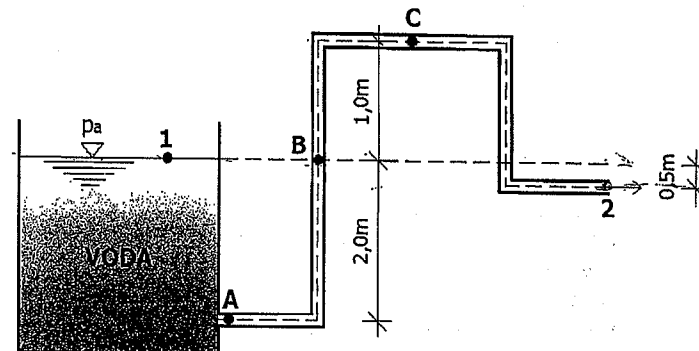
Slika 6.37 Princip rada centrifugalne pumpe

Regulisanje protoka Q korištenjem odnosno pritvaranjem zatvarača, kao što je prethodno navedeno, predstavlja najjeftiniji način. Tada na potisnom vodu se pritvara (prigušuje) zatvarač (slika 6.35) i tako povećavamo njegov koeficijent otpora te time mijenjamo osobine cijevnoga. Zbog tih promjena odnosno promjena $Q-H$ karakteristika cijevnoga, mijenja se radna tačka te time i protok kroz pumpu.

6.7. Riješeni zadaci iz dinamike fluida

Zadatak 6.7.1.

Na otvoreni rezervoar vode spojen je cijevnoga uniformnog poprečnog presjeka D , prema datoj slici. Treba odrediti brzine tečenja vode u tačkama A, B, C i 2 kao i veličine pritiska u tim tačkama. Gustina vode iznosi $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.



RJEŠENJE

Određivanje brzina tečenja vode u tačkama A, B, C i 2:

Bernoullieva jednačina od tačke 1 do tačke 2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \frac{p_1}{\rho g} = 0 \quad \frac{v_1^2}{2g} = 0 \quad \frac{p_2}{\rho g} = 0$$

$$z_1 - z_2 = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{v_2^2}{2g} = 2,0 - 1,5 \Rightarrow \frac{v_2^2}{2g} = 0,5 \Rightarrow v_2^2 = 2g \cdot 0,5$$

$$v_2^2 = 9,81 \Rightarrow v_2 = \sqrt{9,81} \Rightarrow v_2 = 3,13 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_A = v_B = v_C = 3,13 \text{ m/s} \Rightarrow \text{jer imamo isti prečnik cijevi } D.$$

Pritisak u tački A – Bernoullieva jednačina od tačke 1 do tačke A:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} \quad \frac{p_1}{\rho g} = 0 \quad \frac{v_1^2}{2g} = 0$$

$$z_1 - z_A - \frac{v_A^2}{2g} = \frac{p_A}{\rho g} \Rightarrow \frac{p_A}{\rho g} = 2,0 - 0,0 - \frac{3,13^2}{2g}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = 1,50 \Rightarrow p_A = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,50$$

$$p_A = 14715 \text{ N/m}^2 = 14,715 \text{ kN/m}^2$$

Pritisak u tački B – Bernoullieva jednačina od tačke 1 do tačke B:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad \frac{p_1}{\rho g} = 0 \quad \frac{v_1^2}{2g} = 0$$

$$z_1 - z_B = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \Rightarrow z_1 - z_B - \frac{v_B^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho g}$$

$$\frac{p_B}{\rho g} = 2,0 - 2,0 - \frac{3,13^2}{2g} \Rightarrow \frac{p_B}{\rho g} = -0,50 \Rightarrow p_B = 1000 \cdot 9,81 \cdot (-0,50)$$

$$p_B = -4905 \text{ N/m}^2 = -4,905 \text{ kN/m}^2$$

Pritisak u tački C – Bernoullieva jednačina od tačke 1 do tačke C:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{v_C^2}{2g} \quad \frac{p_1}{\rho g} = 0 \quad \frac{v_1^2}{2g} = 0$$

$$z_1 - z_C = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{v_C^2}{2g} \Rightarrow z_1 - z_C - \frac{v_C^2}{2g} = \frac{p_C}{\rho g}$$

$$\frac{p_C}{\rho g} = 2,0 - 3,0 - \frac{3,13^2}{2g} \Rightarrow \frac{p_C}{\rho g} = -1,50 \Rightarrow p_C = 1000 \cdot 9,81 \cdot (-1,50)$$

$$p_C = -14715 \text{ N/m}^2 = -14,715 \text{ kN/m}^2$$

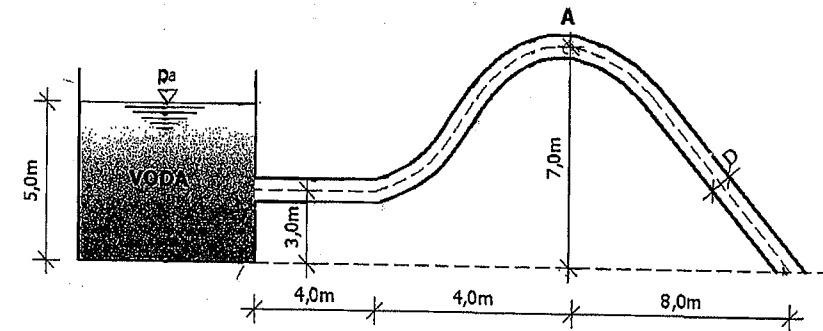
Pritisak u tački 2:

U tački 2 voda iz cijevi prečnika D slobodno ističe u atmosferu, te u tački 2 vlada atmosferski pritisak, odnosno $p_2 = p_a$.

Zadatak 6.7.2.

Za dati sistem prema slici i idealnu tečnost potrebno je nacrtati energetska i pijeziometrijsku liniju te odrediti protok vode kroz sistem. Na najvišoj tački u sistemu (tačka A) odrediti veličinu pritiska.

Zadato: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $D = 500 \text{ mm}$.

**RJEŠENJE**

Određivanje protoka vode kroz sistem:

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru – izlaz vode iz cijevi)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \frac{p_1}{\rho g} = 0 \quad \frac{v_1^2}{2g} = 0 \quad \frac{p_2}{\rho g} = 0$$

$$z_1 = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow z_1 - z_2 = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow 5,0 - 0,0 = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{v_2^2}{2g} = 5,0$$

$$v_2^2 = 2g \cdot 5,0 \Rightarrow v_2^2 = 98,10 \Rightarrow v_2 = \sqrt{98,10} \Rightarrow v_2 = 9,91 \text{ m/s}$$

$$Q = A \cdot v \Rightarrow Q = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot v = \frac{0,5^2 \pi}{4} \cdot 9,91 \Rightarrow Q = 1,95 \text{ m}^3/\text{s}$$

Određivanje veličine pritiska u tački A:

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru – tačka A)

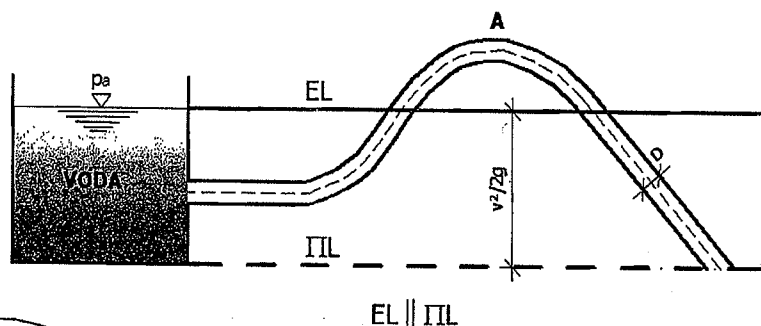
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} \quad \frac{p_1}{\rho g} = 0 \quad \frac{v_1^2}{2g} = 0$$

$$z_1 = z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} \Rightarrow z_1 - z_A - \frac{v_A^2}{2g} = \frac{p_A}{\rho g}$$

$$5,0 - 7,0 - \frac{9,91^2}{2g} = \frac{p_A}{\rho g} \Rightarrow -7,0 = \frac{p_A}{\rho g} \Rightarrow p_A = \rho g \cdot (-7,0)$$

$$p_A = -68670 \text{ N} = -68,67 \text{ kN}$$

Energetska i piježometarska linija:

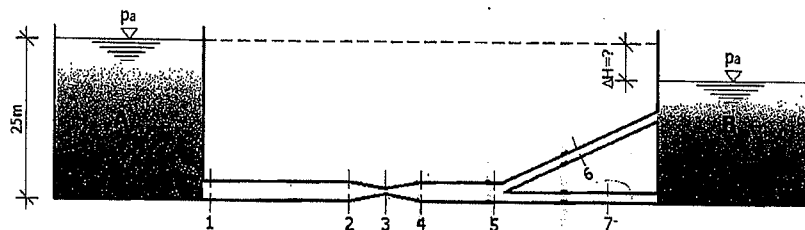


Zadatak 6.7.3.

Dva velika rezervoara A i B, prema datoj slici, međusobno su povezana cjevovodom. Između cjevovoda u presjecima 2 i 3 izmjerena je visoka razlika pritiska Δh . Treba izračunati i odrediti sljedeće vrijednosti u sistemu, računajući bez gubitaka pri strujanju vode:

- Ukupni protok Q .
- Prečnik cijevi d_7 tako da kroz cijev broj 6 protiče dva puta veća količina vode od cijevi 7.
- Razliku vodnih površina ΔH između rezervoara A i B.
- Nacrtati liniju pritiska i liniju energije datog sistema.

Zadato: $d_1=d_2=d_4=d_5=150 \text{ mm}$; $d_3=d_6=100 \text{ mm}$; $\Delta h=22 \text{ m}$; $g=9,81 \text{ m/s}^2$; $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$.



RJEŠENJE

a) Određivanje ukupnog protoka (Q) vode:

$$\Delta h = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_3}{\rho g} \Rightarrow \Delta h = \frac{p_2 - p_3}{\rho g}$$

$$Q = A \cdot v \Rightarrow v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\frac{0,15^2 \pi}{4}} = \frac{4Q}{0,15^2 \pi} \Rightarrow v_2 = 56,62Q$$

$$v_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{Q}{\frac{0,10^2 \pi}{4}} = \frac{4Q}{0,10^2 \pi} \Rightarrow v_3 = 127,39Q$$

Bernoullieva jednačina (presjek 2 do presjek 3)

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} \quad z_2 = z_3$$

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{(56,62Q)^2}{2g} = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{(127,39Q)^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_3}{\rho g} = \frac{(127,39Q)^2}{2g} - \frac{(56,62Q)^2}{2g} \quad \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_3}{\rho g} = \Delta h = 22,0 \text{ m}$$

$$\Delta h = 827,13Q^2 - 163,39Q^2 \Rightarrow 22 = 663,74Q^2$$

$$Q^2 = \frac{22}{663,74} = 0,03314 \Rightarrow Q = \sqrt{0,03314} \quad Q = 0,182 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) Određivanje prečnika cijevi 7 (d_7):

$$Q_6 = 2Q_7$$

$$Q_6 = A_6 \cdot v_6 \quad Q_7 = A_7 \cdot v_7$$

Za cijevi 6 i 7 energetska i tlačna linija odgovaraju odnosno brzinske visine su jednake.

$$\frac{d_6^2 \pi}{4} \cdot v_6 = 2 \cdot \left(\frac{d_7^2 \pi}{4} \cdot v_7 \right)$$

$$\frac{v_6^2}{2g} = \frac{v_7^2}{2g} \Rightarrow v_6 = v_7$$

$$\frac{0,10^2 \pi}{4} \cdot v_6 = 2 \cdot \left(\frac{d_7^2 \pi}{4} \cdot v_6 \right) \Rightarrow 0,00785 v_6 = \frac{2 d_7^2 \pi \cdot v_6}{4}$$

$$0,00785 v_6 = \frac{d_7^2 \pi \cdot v_6}{2} \Rightarrow 0,0157 v_6 = d_7^2 \pi \cdot v_6$$

$$d_7^2 \pi = 0,0157 \Rightarrow d_7^2 = \frac{0,0157}{\pi} = \frac{0,0157}{3,14}$$

$$d_7^2 = 0,005 \Rightarrow d_7 = \sqrt{0,005} \Rightarrow d_7 = 0,0707 \text{ m}$$

c) Određivanje visinske razlike vodnih površina (ΔH):

Bernoullieva jednačina (rezervoar A do cijevi 7)

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_7 + \frac{p_7}{\rho g} + \frac{v_7^2}{2g} \quad \frac{p_A}{\rho g} = 0 ; \frac{v_A^2}{2g} = 0 ; z_7 = 0$$

$$z_A = \frac{p_7}{\rho g} + \frac{v_7^2}{2g} \quad \frac{p_7}{\rho g} = z_A - \Delta H \quad z_A = 25,0 \text{ m}$$

$$z_A = z_A - \Delta H + \frac{v_7^2}{2g} \Rightarrow \Delta H = \frac{v_7^2}{2g}$$

$$v_7 = \frac{\frac{1}{3} Q}{\frac{d_7^2 \pi}{4}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,182}{\frac{0,707^2 \pi}{4}} \Rightarrow v_7 = \frac{0,182}{\frac{3}{1,569}} = \frac{0,728}{4,707} \Rightarrow v_7 = 0,155 \text{ m/s}$$

$$\Delta H = \frac{0,155^2}{2g} \Rightarrow \Delta H = 0,0012245 \text{ m}$$

$$d) v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0,182}{\frac{0,15^2 \pi}{4}} \Rightarrow v_1 = v_2 = v_4 = v_5 = 10,31 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_4^2}{2g} = \frac{v_5^2}{2g} = \frac{10,31^2}{2g} = 5,42 \text{ m}$$

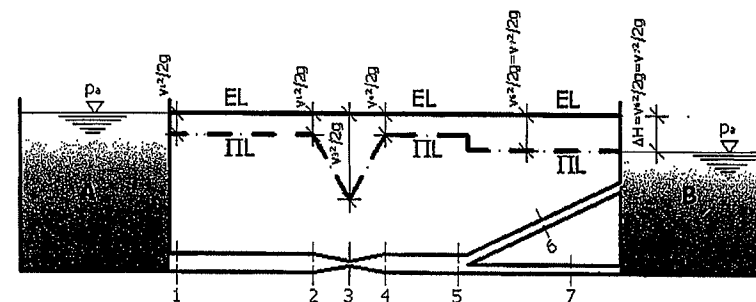
$$v_3 = \frac{Q_3}{A} = \frac{0,182}{\frac{0,10^2 \pi}{4}}$$

$$v_3 = 23,18 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_3^2}{2g} = \frac{23,18^2}{2g} = 27,38 \text{ m}$$

$$\frac{v_6^2}{2g} = \frac{v_7^2}{2g} = \frac{0,155^2}{2g} = 0,0012245 \text{ m} = \Delta H$$

Energetska i piježometarska linija:

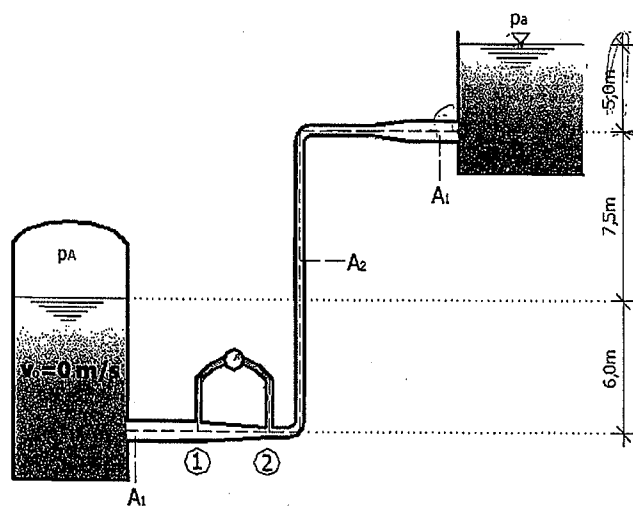


Zadatak 6.7.4.

Iz jedne velike zatvorene posude koja je pod pritiskom p_A , voda se pomoću uzlaznog cjevovoda doprema u rezervoar B, prema datoj slici. Manometar pokazuje diferencijalni pritisak $\Delta p/\gamma$ između presjeka 1 i 2 datog cjevovoda.

- Odrediti koliki protok Q protiče cjevovodom.
- Koliki je unutarnji pritisak p_A u zatvorenoj posudi?
- Nacrtati liniju energije i liniju pritiska za dati sistem.

Zadato: $\Delta p/\gamma = 2,0\text{m}$; $A_1 = 1,0\text{m}^2$; $A_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{m}^2$; $\rho = 1000\text{kg/m}^3$; $g = 9,81\text{m/s}^2$.

**RJEŠENJE**

a) **Određivanje protoka Q kroz cjevovod:**

$$A_1 = \frac{Q}{v_1} \quad A_2 = \frac{Q}{v_2}$$

$$\frac{Q}{v_1} = 1,0 \Rightarrow v_1 = Q$$

$$\frac{Q}{v_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{Q}{v_2} = 0,577 \Rightarrow 0,577v_2 = Q \Rightarrow v_2 = \frac{Q}{0,577}$$

Bernoullieva jednačina (tačka 1 do tačka 2)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{jednačina (1)}$$

$$z_1 = z_2 = 0; \quad p_1 - p_2 = \Delta p$$

$$\text{Jednačina (1): } \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\left(\frac{Q}{0,577}\right)^2}{2g} - \frac{Q^2}{2g} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{0,333}{2g} - \frac{Q^2}{2g}$$

$$2,0 = \frac{Q^2}{6,533} - \frac{Q^2}{19,62} \Rightarrow 2,0 = \frac{3,0Q^2 - Q^2}{19,62} \Rightarrow 2,0 = \frac{2,0Q^2}{19,62}$$

$$2,0Q^2 = 39,24 \Rightarrow Q^2 = \frac{39,24}{2,0} = 19,62$$

$$Q = \sqrt{19,62} \Rightarrow Q = 4,43\text{m}^3/\text{s}$$

$$v_1 = Q \Rightarrow v_1 = 4,43\text{m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{0,577} \Rightarrow v_2 = \frac{4,43}{0,577} \Rightarrow v_2 = 7,67\text{m/s}$$

b) **Određivanje pritiska p_A u zatvorenoj posudi:**

Bernoullieva jednačina (zatvorena posuda – ulaz cijevi u rezervoar B)

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$z_0 = 6,0m ; \frac{P_0}{\rho g} = \frac{P_A}{\rho g} ; v_0 = 0,0m/s$$

$$z_3 = 6,0 + 7,5 = 13,5m ; \frac{P_3}{\rho g} = 5,0m ; \frac{v_3^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g}$$

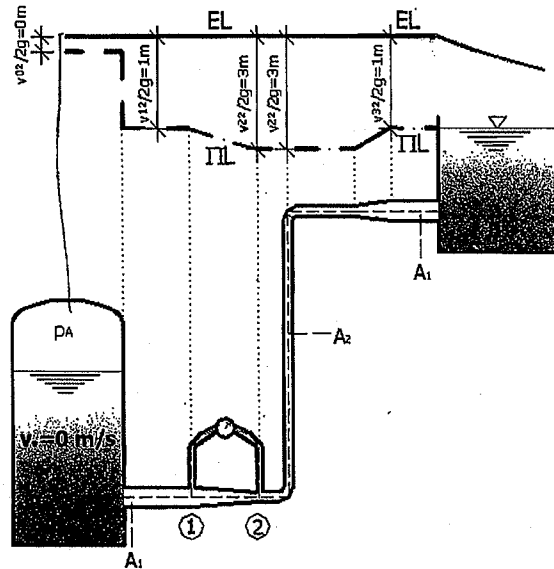
$$6,0 + \frac{P_A}{\rho g} = 13,5 + 5,0 + \frac{4,43^2}{2g}$$

$$\frac{P_A}{\rho g} = 13,5 + 5,0 + 1,0 - 6,0 \Rightarrow \frac{P_A}{\rho g} = 13,5m$$

$$p_A = \rho g \cdot 13,5 \Rightarrow p_A = 1000 \cdot 9,81 \cdot 13,5$$

$$p_A = 132435N/m^2 = 132,435kN/m^2$$

c) Energetska i pijezometarska linija:

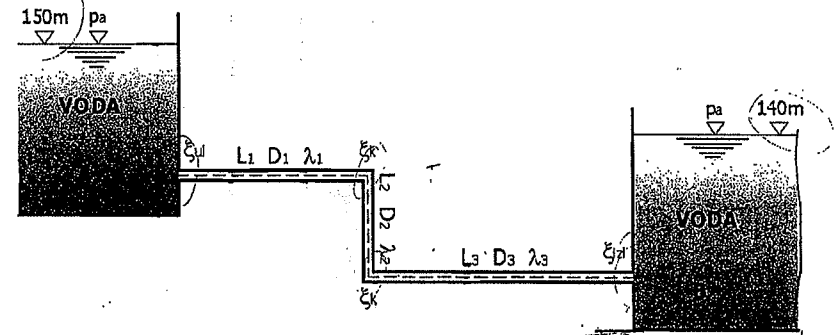


Zadatak 6.7.5.

Za sistem prema datoj slici potrebno je izračunati brzinu tečenja i protok vode. Nacrtati energetska i tlačnu (pijezometarsku) liniju.

Zadato: $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$; $D_1 = D_2 = D_3 = 200 \text{ mm}$; $L_1 = 10 \text{ m}$; $L_2 = 5 \text{ m}$; $L_3 = 15 \text{ m}$;

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,025$; $\xi_{\text{til}} = 0,5$; $\xi_k = 0,6$; $\xi_{\text{izl}} = 1,0$.



RJEŠENJE

Određivanje brzine tečenja i protoka vode kroz sistem:

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru A – nivo vode u rezervoaru B) - referentna ravan je nivo vode u rezervoaru B -

$$z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + \Delta H$$

$$\frac{P_A}{\rho g} = 0 ; \frac{v_A^2}{2g} = 0 ; z_B = 0 ; \frac{P_B}{\rho g} = 0 ; \frac{v_B^2}{2g} = 0$$

$$z_A = \Delta H \Rightarrow \Delta H = 10m$$

$$\Delta H = \xi_{\text{til}} \frac{v^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{v^2}{2g} + 2\xi_k \frac{v^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \cdot \frac{v^2}{2g} + \lambda_3 \frac{L_3}{D_3} \cdot \frac{v^2}{2g} + \xi_{\text{izl}} \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,5 \frac{v^2}{2g} + 0,025 \frac{10}{0,2} \cdot \frac{v^2}{2g} + 2 \cdot 0,6 \frac{v^2}{2g} + 0,025 \frac{5}{0,2} \cdot \frac{v^2}{2g} + 0,025 \frac{15}{0,2} \cdot \frac{v^2}{2g} + 1,0 \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,0255v^2 + 0,0637v^2 + 0,0612v^2 + 0,0318v^2 + 0,0955v^2 + 0,0509v^2$$

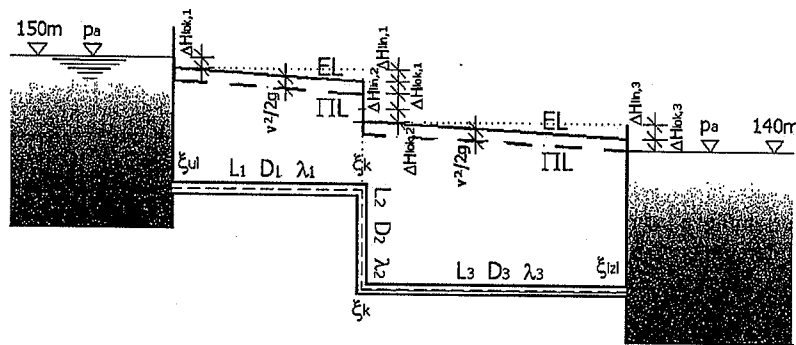
$$\Delta H = 0,3286v^2 \Rightarrow 10 = 0,3286v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{10}{0,3286} = 30,43$$

$$v = \sqrt{30,43} \Rightarrow v = 5,52 \text{ m/s}$$

$$A = \frac{D^2 \pi}{4} = \frac{0,2^2 \pi}{4} \Rightarrow A = 0,0314 \text{ m}^2$$

$$Q = A \cdot v = 0,0314 \cdot 5,52 \Rightarrow Q = 0,173 \text{ m}^3/\text{s}$$

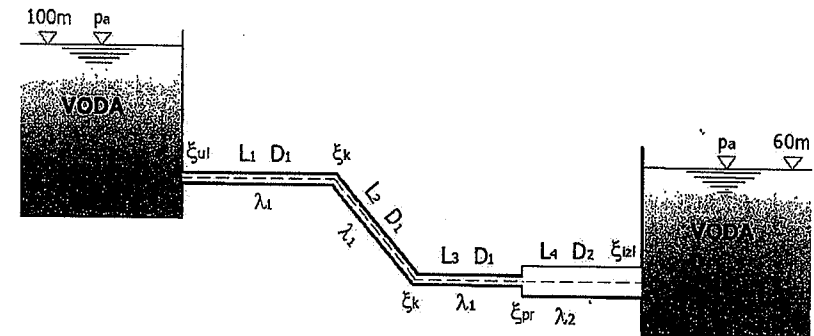
Energetska i pjezometarska linija:



Zadatak 6.7.6.

Za cijevni sistem između dva rezervoara treba odrediti veličinu koeficijenta lokalnog gubitka na proširenju. Nacrtati energetska i tlačna (pjezometarska) linija.

Zadato: $Q=0,05 \text{ m}^3/\text{s}$; $D_1=100 \text{ mm}$; $D_2=200 \text{ mm}$; $L_1=40 \text{ m}$; $L_2=20 \text{ m}$; $L_3=20 \text{ m}$; $L_4=20 \text{ m}$; $\lambda_1=0,022$; $\lambda_2=0,025$; $\xi_{ul}=0,5$; $\xi_k=0,4$; $\xi_{izl}=1,0$
 $\rho_v=1000 \text{ kg/m}^3$; $g=9,81 \text{ m/s}^2$.



RJEŠENJE

Određivanje koeficijenta lokalnog gubitka na proširenju:

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru A – nivo vode u rezervoaru B)

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + \Delta H$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = 0; \frac{v_A^2}{2g} = 0; \frac{p_B}{\rho g} = 0; \frac{v_B^2}{2g} = 0$$

$$z_A = z_B + \Delta H \Rightarrow 100 = 60 + \Delta H$$

$$\Delta H = 100 - 60 \Rightarrow \Delta H = 40 \text{ m}$$

$$\Delta H = \Delta H_{lok} + \Delta H_{lin} \quad \text{jednačina (1)}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\frac{D_1^2 \pi}{4}} \Rightarrow v_1 = \frac{0,05}{\frac{0,1^2 \pi}{4}} = \frac{0,05}{0,00785} \Rightarrow v_1 = 6,37 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\frac{D_2^2 \pi}{4}} \Rightarrow v_2 = \frac{0,05}{\frac{0,2^2 \pi}{4}} = \frac{0,05}{0,0314} \Rightarrow v_2 = 1,59 \text{ m/s}$$

$$\Delta H_{lok} = \xi_{ul} \frac{v_1^2}{2g} + 2\xi_k \frac{v_1^2}{2g} + \xi_{pros} \frac{v_2^2}{2g} + \xi_{izl} \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\Delta H_{lok} = 0,5 \frac{6,37^2}{2g} + 2 \cdot 0,4 \frac{6,37^2}{2g} + \xi_{proš} \frac{1,59^2}{2g} + 1,0 \frac{1,59^2}{2g}$$

$$\Delta H_{lok} = 1,03 + 1,65 + 0,128 \xi_{proš} + 0,128$$

$$\Delta H_{lok} = 2,808 + 0,128 \xi_{proš}$$

$$\Delta H_{lin} = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_2}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_3}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_4}{D_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\Delta H_{lin} = 0,022 \frac{40}{0,1} \cdot \frac{6,37^2}{2g} + 0,022 \frac{20}{0,1} \cdot \frac{6,37^2}{2g} + 0,022 \frac{20}{0,1} \cdot \frac{6,37^2}{2g} + 0,025 \frac{20}{0,2} \cdot \frac{1,59^2}{2g}$$

$$\Delta H_{lin} = 18,19 + 9,09 + 9,09 + 0,32$$

$$\Delta H_{lin} = 36,69m$$

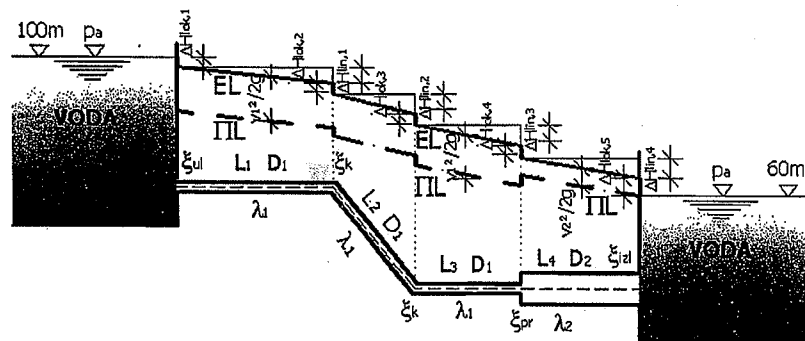
Jednačina (1):

$$\Delta H = 2,808 + 0,128 \xi_{proš} + 36,69 \Rightarrow \Delta H = 39,489 + 0,128 \xi_{proš}$$

$$\Delta H = 40m \Rightarrow 40 = 39,489 + 0,128 \xi_{proš} \Rightarrow 0,128 \xi_{proš} = 40 - 39,489$$

$$0,128 \xi_{proš} = 0,511 \Rightarrow \xi_{proš} = \frac{0,511}{0,128} \Rightarrow \xi_{proš} = 3,99$$

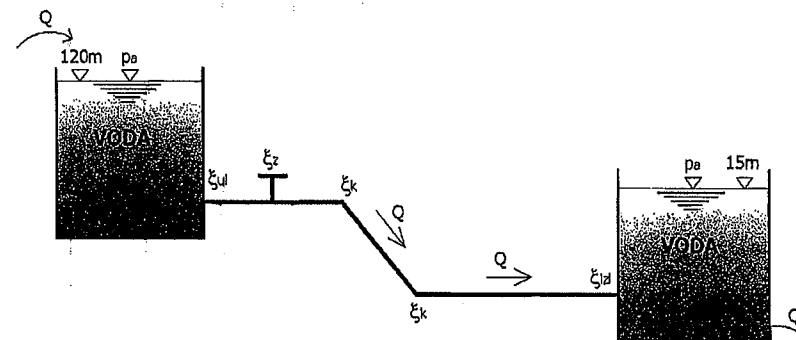
Energetska i pijezometarska linija:



Zadatak 6.7.7.

Iz rezervoara A voda se cjevovodom dužine 600 m čiji je prečnik 400 mm, transportuje do rezervoara B. Nivoi vode u rezervoarima održavaju se na istoj koti odnosno visini, prema datoj slici. Potrebno je izračunati količinu vode Q koja se datim cjevovodom transportuje. Nacrtati liniju energije i liniju pritiska.

Zadato: $L=600$ m ; $D=400$ mm ; $\lambda=0,15$; $\xi_{ul}=0,5$; $\xi_{izl}=1,0$; $\xi_z=2,0$; $\xi_k=0,3$;
 $\rho_v=1000$ kg/m³ ; $g=9,81$ m/s².



RJEŠENJE

Određivanje količine vode Q koja se transportuje datim sistemom:

Bernoullieva jednačina (rezervoar A – rezervoar B)

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + \Delta H$$

$$p_A = p_B = p_a = 0 ; v_A = v_B = 0$$

$$z_A - z_B = \Delta H \Rightarrow 120 - 15 = \Delta H \quad \text{jednačina (1)}$$

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \xi_{ul} \frac{v^2}{2g} + \xi_z \frac{v^2}{2g} + 2\xi_k \frac{v^2}{2g} + \xi_{izl} \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,15 \frac{600}{0,4} \cdot \frac{v^2}{2g} + 0,5 \frac{v^2}{2g} + 2,0 \frac{v^2}{2g} + 2 \cdot 0,3 \frac{v^2}{2g} + 1,0 \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta H = 11,47v^2 + 0,025v^2 + 0,102v^2 + 0,031v^2 + 0,051v^2$$

$$\Delta H = 11,679v^2$$

Jednačina (1):

$$120 - 15 = \Delta H \Rightarrow 105 = 11,679v^2 \Rightarrow v^2 = 8,991$$

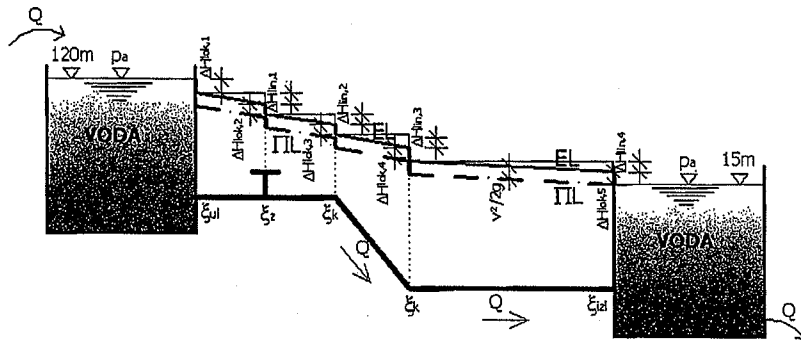
$$v = \sqrt{8,991} \Rightarrow v = 2,99 \text{ m/s}$$

Protok vode kroz sistem:

$$Q = A \cdot v$$

$$Q = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot v = \frac{0,4^2 \pi}{4} \cdot 2,99 \Rightarrow Q = 0,375 \text{ m}^3/\text{s}$$

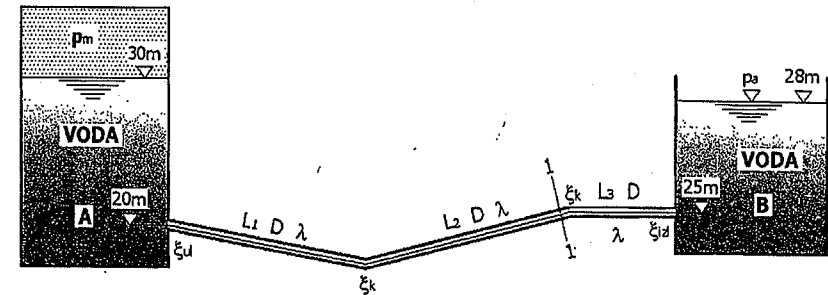
Energetska i piježometarska linija:



Zadatak 6.7.8.

Za sistem prikazan na slici potrebno je izračunati protok vode i pritisak u presjeku 1-1 (neposredno ispred koljena). U rezervoaru A iznad nivoa vode vlada pritisak p_m . Nacrtati energetska i piježometarska linija.

Zadato: $D=250 \text{ mm}$; $L_1=30 \text{ m}$; $L_2=40 \text{ m}$; $L_3=20 \text{ m}$; $\lambda=0,025$; $\xi_{u1}=0,5$; $\xi_k=0,45$; $p_m=150 \text{ kPa}$; $\rho_v=1000 \text{ kg/m}^3$; $g=9,81 \text{ m/s}^2$.



RJEŠENJE

Određivanje protoka vode Q:

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru A – nivo vode u rezervoaru B)

$$z_A + \frac{p_m}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + \Delta H$$

$$\frac{v_A^2}{2g} = 0; \quad \frac{p_B}{\rho g} = 0; \quad \frac{v_B^2}{2g} = 0$$

$$10 + \frac{p_m}{\rho g} = 8 + \Delta H \Rightarrow 10 + \frac{p_m}{\rho g} - 8 = \Delta H \Rightarrow \frac{p_m}{\rho g} + 2 = \Delta H$$

$$\frac{150 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9,81} + 2 = \Delta H \Rightarrow \Delta H = 17,29 \text{ m}$$

$$Q = A \cdot v \Rightarrow v = \frac{Q}{A} \Rightarrow A = \frac{D^2 \pi}{4} = \frac{0,25^2 \pi}{4} \Rightarrow A = 0,04906 \text{ m}^2$$

$$\Delta H = \xi_{ul} \frac{v^2}{2g} + 2\xi_k \frac{v^2}{2g} + \xi_{izl} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_1}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_2}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_3}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{Q}{0,04906}$$

$$\Delta H = 0,5 \frac{\left(\frac{Q}{0,04906}\right)^2}{2g} + 2 \cdot 0,45 \frac{\left(\frac{Q}{0,04906}\right)^2}{2g} + 1,0 \frac{\left(\frac{Q}{0,04906}\right)^2}{2g} +$$

$$+ 0,025 \frac{\left(\frac{Q}{0,04906}\right)^2}{2g} \cdot \left(\frac{30,0}{0,25} + \frac{40,0}{0,25} + \frac{20,0}{0,25}\right)$$

$$\Delta H = 0,5 \frac{Q^2}{0,04722} + 0,9 \frac{Q^2}{0,04722} + 1,0 \frac{Q^2}{0,04722} + 0,025 \frac{Q^2}{0,04722} \cdot (120 + 160 + 80)$$

$$\Delta H = 10,58Q^2 + 19,06Q^2 + 21,17Q^2 + 0,53Q^2 \cdot 360$$

$$\Delta H = 10,58Q^2 + 19,06Q^2 + 21,17Q^2 + 190,80Q^2$$

$$\Delta H = 241,61Q^2 \Rightarrow 17,29 = 241,61Q^2$$

$$Q^2 = \frac{17,29}{241,61} \Rightarrow Q^2 = 0,07156$$

$$Q = \sqrt{0,07156} \Rightarrow Q = 0,267 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0,267}{0,04906} \Rightarrow v = 5,44 \text{ m/s}$$

Pritisak u presjeku 1-1:

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru A – presjek 1-1)

$$z_A + \frac{p_m}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \Delta H \quad v_1 = v$$

$$5,0 + \frac{p_m}{\rho g} = 0 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{5,44^2}{2g} + \Delta H$$

$$5,0 + \frac{150 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9,81} = 1,508 + \frac{p_1}{\rho g} + \Delta H \Rightarrow 5,0 + 15,29 = 1,508 + \frac{p_1}{\rho g} + \Delta H$$

$$20,29 - 1,508 - \Delta H = \frac{p_1}{\rho g} \Rightarrow 18,782 - \Delta H = \frac{p_1}{\rho g} \quad \text{jednačina (1)}$$

$$\Delta H = \xi_{ul} \frac{v^2}{2g} + \xi_k \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_1}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_2}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,5 \frac{5,44^2}{2g} + 0,45 \frac{5,44^2}{2g} + 0,025 \frac{30}{0,25} \cdot \frac{5,44^2}{2g} + 0,025 \frac{40}{0,25} \cdot \frac{5,44^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,754 + 0,678 + 4,525 + 6,033 \Rightarrow \Delta H = 11,99 \text{ m}$$

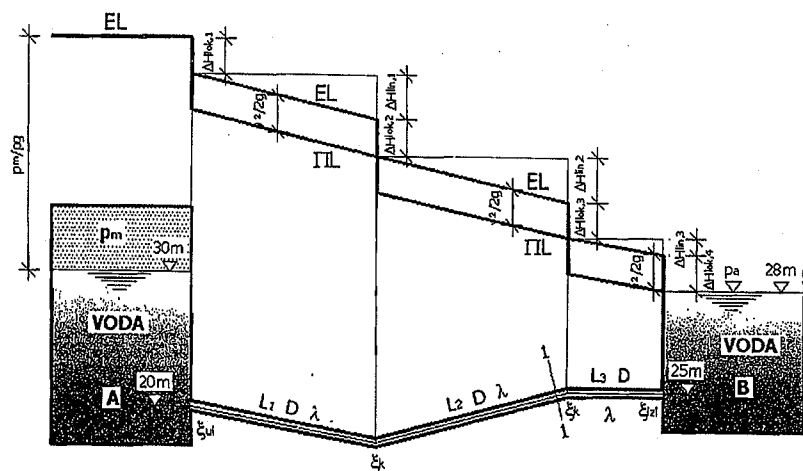
Jednačina (1):

$$18,782 - \Delta H = \frac{p_1}{\rho g} \Rightarrow 18,782 - 11,99 = \frac{p_1}{\rho g}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = 6,792 \Rightarrow p_1 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 6,792$$

$$p_1 = 66629,52 \text{ N/m}^2 = 66,629 \text{ kN/m}^2$$

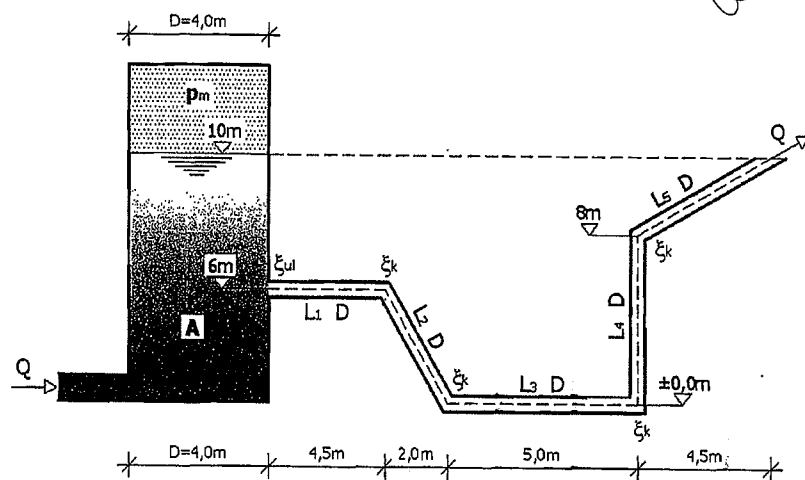
Energetska i piježometarska linija:



Zadatak 6.7.9.

U rezervoar A, prikazan na slici, utiče ista količina vode koja iz njega ističe. Kroz sistem protiče $Q=10$ l/s vode. Potrebno je odrediti silu pritiska p_m kojom vazduh djeluje na kružni poklopac rezervoara cilindričnog oblika, čiji je prečnik 4,0 m. Nacrtati energetska i piježometarska linija.

Zadato: $D=200$ mm ; $\lambda=0,022$; $Q=10$ l/s ; $\xi_{ul}=0,5$; $\xi_k=0,4$.



RJEŠENJE

Pri proračunu uzмимо da referentna ravan odgovara nivou vode u rezervoaru.

$$L_2 = \sqrt{2,0^2 + 6,0^2} = 6,33m$$

$$L_3 = \sqrt{4,5^2 + 2,0^2} = 4,92m$$

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru – izlaz iz cijevnog sistema)

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H$$

$$z_A = 0 ; \frac{v_A^2}{2g} = 0 ; z_2 = 0 ; \frac{p_2}{\rho g} = 0$$

$$Q = A \cdot v \Rightarrow v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{D^2 \pi} = \frac{0,01}{0,2^2 \pi} = \frac{0,01}{0,0314} \Rightarrow v = 0,32m/s$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H \quad \text{jednačina (1)}$$

$$\Delta H = \xi_{ul} \frac{v^2}{2g} + 4\xi_k \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_1}{D} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_2}{D} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_3}{D} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_4}{D} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{L_5}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,5 \frac{0,32^2}{2g} + 4 \cdot 0,4 \frac{0,32^2}{2g} + 0,022 \frac{4,5}{0,2} \frac{0,32^2}{2g} + 0,022 \frac{6,33}{0,2} \frac{0,32^2}{2g} +$$

$$+ 0,022 \frac{5,0}{0,2} \frac{0,32^2}{2g} + 0,022 \frac{8,0}{0,2} \frac{0,32^2}{2g} + 0,022 \frac{4,92}{0,2} \frac{0,32^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,003 + 0,008 + 0,0025 + 0,0036 + 0,0028 + 0,0046 + 0,0028$$

$$\Delta H = 0,0273m$$

Jednačina (1):

$$\frac{p_A}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} + \Delta H \Rightarrow \frac{p_A}{\rho g} = \frac{0,37^2}{2g} + 0,0273 \Rightarrow \frac{p_A}{\rho g} = 0,0052 + 0,0273$$

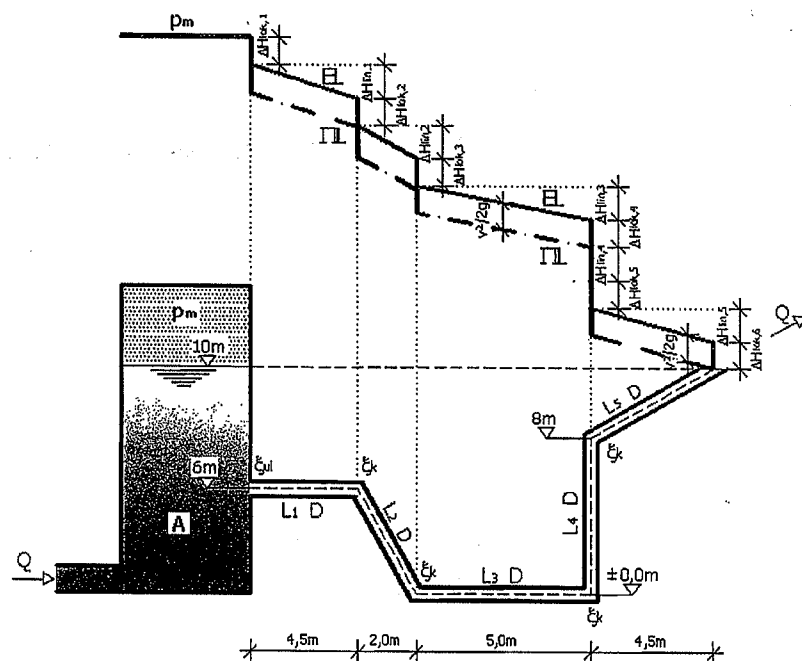
$$\frac{p_A}{\rho g} = 0,0325 \Rightarrow p_A = p_m = \rho g \cdot 0,0325$$

$$p_m = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,0325 \Rightarrow p_m = 318,825 \text{ N/m}^2 = 0,318 \text{ kN/m}^2$$

Sila kojom vazduh djeluje na kružni poklopac rezervoara:

$$F = p_m \cdot \frac{D_R^2 \pi}{4} \Rightarrow F = 0,318 \cdot \frac{4,0^2 \pi}{4} \Rightarrow F = 3,99 \text{ kN}$$

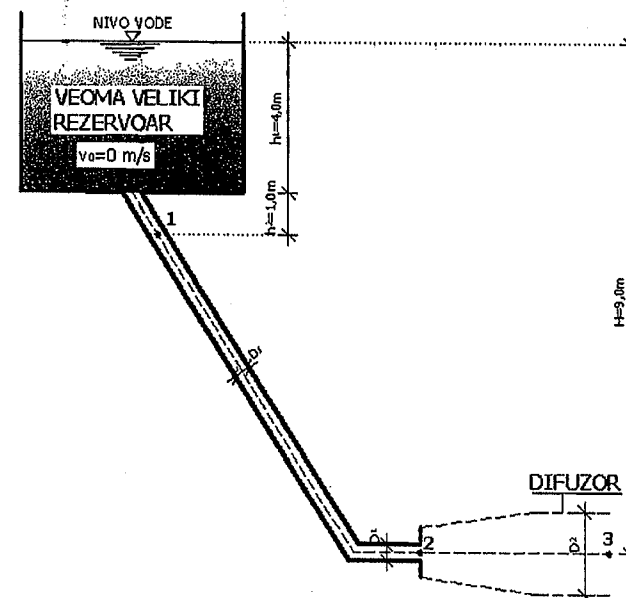
Energetska i pijeziometarska linija:

**Zadatak 6.7.10.**

Iz jednog veoma velikog rezervoara sa slobodnom površinom i konstantnim vodnim licem ($v_0=0$ m/s) voda ističe kroz cijev prečnika D_1 . Na kraju cijevi D_1 , u tački 2, ugradit će se difuzor čija dužina iznosi od tačke 2 do tačke 3, prema datoj slici.

- Izračunati brzinu tečenja vode i pritisak u tačkama 1 i 2 kao i količinu vode Q prije ugradnje difuzora.
- Izračunati brzinu tečenja vode i pritisak u tačkama 2 i 3 nakon ugradnje difuzora.

Zadato: $v_0=0,0$ m/s ; $H=9,00$ m ; $h_1=4,00$ m ; $h_2=1,00$ m ; $D_1=300$ mm ; $D_2=500$ mm ; $\rho_v=1000$ kg/m³ ; $g=9,81$ m/s².

**RJEŠENJE**

- Brzina tečenja i protok vode Q prije ugradnje difuzora:

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru – tačka 2)

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_0}{\rho g} = 0 ; \frac{v_0^2}{2g} = 0 ; \frac{p_2}{\rho g} = 0$$

$$z_0 = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow 9,0 = 0 + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{v_2^2}{2g} = 9,0$$

$$v_2^2 = 2g \cdot 9,0 \Rightarrow v_2^2 = 176,58 \Rightarrow v_2 = \sqrt{176,58}$$

$$v_2 = 13,29 \text{ m/s}$$

$$Q = A \cdot v \Rightarrow Q = \frac{D_1^2 \pi}{4} \cdot v = \frac{0,3^2 \pi}{4} \cdot 13,29 \Rightarrow Q = 0,939 \text{ m}^3/\text{s}$$

Pritisak u tački 1 (prije ugradnje difuzora):

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru – tačka 1)

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$v_1 = v = 13,29 \text{ m/s}$$

$$z_0 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow 9,0 = 4,0 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{13,29^2}{2g}$$

$$9,0 = 4,0 + \frac{p_1}{\rho g} + 9,0 \Rightarrow \frac{p_1}{\rho g} = -4,0 \Rightarrow p_1 = \rho g \cdot (-4,0)$$

$$p_1 = 1000 \cdot 9,81 \cdot (-4,0) \Rightarrow p_1 = -39240 \text{ N/m}^2 = -39,24 \text{ kN/m}^2$$

Pritisak u tački 2 (prije ugradnje difuzora):

Prije ugradnje difuzora, prema slici, u tački 2 vlada atmosferski pritisak, odnosno:

$$p_2 = p_a = 0 \text{ N/m}^2$$

b) Brzine tečenja i protok vode Q nakon ugradnje difuzora:

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru – tačka 3)

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\frac{p_0}{\rho g} = 0 ; \frac{v_0^2}{2g} = 0 ; \frac{p_3}{\rho g} = 0$$

$$z_0 = z_3 + \frac{v_3^2}{2g} \Rightarrow 9,0 = 0 + \frac{v_3^2}{2g} \Rightarrow \frac{v_3^2}{2g} = 9,0$$

$$v_3^2 = 2g \cdot 9,0 \Rightarrow v_3^2 = 176,58 \Rightarrow v_3 = \sqrt{176,58}$$

$$v_3 = 13,29 \text{ m/s}$$

Protok Q (sa brzinom v_3):

$$Q = A \cdot v \Rightarrow Q = \frac{D_3^2 \pi}{4} \cdot v_3 = \frac{0,5^2 \pi}{4} \cdot 13,29 \Rightarrow Q = 2,61 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = Q_2 = 2,61 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_3 \cdot A_3 = v_2 \cdot A_2 \Rightarrow v_2 = \frac{v_3 \cdot A_3}{A_2} = \frac{13,29 \cdot \frac{0,5^2 \pi}{4}}{\frac{0,3^2 \pi}{4}} = \frac{2,61}{0,071}$$

$$v_2 = 36,76 \text{ m/s}$$

Pritisak u tački 2 (nakon ugradnje difuzora):

Bernoullieva jednačina (nivo vode u rezervoaru – tačka 2)

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_0}{\rho g} = 0 ; \frac{v_0^2}{2g} = 0$$

$$z_0 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow 9,0 = 0 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{36,76^2}{2g} \Rightarrow 9,0 = \frac{p_2}{\rho g} + 68,87$$

$$\frac{p_2}{\rho g} = -59,87 \Rightarrow p_2 = \rho g \cdot (-59,87) \Rightarrow p_2 = 1000 \cdot 9,81 \cdot (-59,87)$$

$$p_2 = -587324,7 \text{ N/m}^2 = -587,32 \text{ kN/m}^2$$

Pritisak u tački 3 (nakon ugradnje difuzora):

Nakon ugradnje difuzora, prema slici, u tački 3 vlada atmosferski pritisak, odnosno:

$$p_3 = p_a = 0 \text{ N/m}^2$$

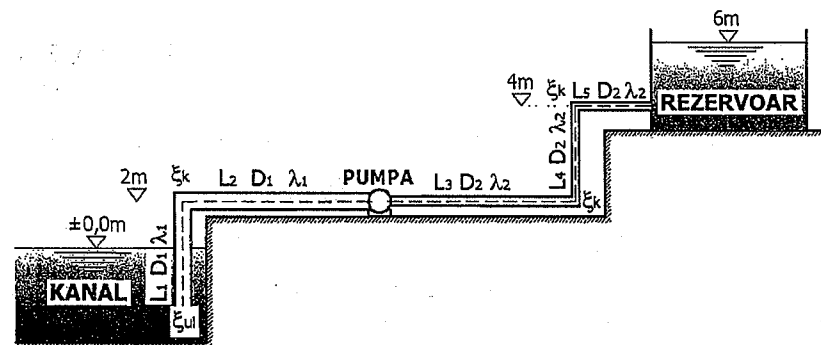
Zadatak 6.7.11.

Za sistem prikazan na slici potrebno je izračunati snagu pumpe, nacrtati energetsku i pijezometarsku liniju i odrediti minimalni pritisak u cjevovodu te naznačiti njegov položaj.

Zadato: $D_1=100 \text{ mm}$; $D_2=50 \text{ mm}$; $Q=0,01 \text{ m}^3/\text{s}$; $L_1=L_2=L_3=5 \text{ m}$; $L_4=2 \text{ m}$;

$L_5=5 \text{ m}$; $\xi_{ul}=0,5$; $\xi_k=0,3$; $\xi_{izl}=1,0$; $\lambda_1=0,021$; $\lambda_2=0,023$; $\eta=0,75$;

$\rho_v=1000 \text{ kg/m}^3$; $g=9,81 \text{ m/s}^2$.



RJEŠENJE

Bernoullieva jednačina (nivo vode u kanalu – nivo vode u rezervoaru)

$$z_k + \frac{p_k}{\rho g} + \frac{v_k^2}{2g} + H_p = z_R + \frac{p_R}{\rho g} + \frac{v_R^2}{2g} + \Delta H \text{ referentna ravan=nivo vode u kanalu}$$

$$\frac{p_k}{\rho g} = 0; \frac{v_k^2}{2g} = 0; \frac{p_R}{\rho g} = 0; \frac{v_R^2}{2g} = 0$$

$$0 + H_p = 8,0 + \Delta H \Rightarrow H_p = 8,0 + \Delta H \text{ jednačina (1)}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{D_1^2 \pi / 4} \Rightarrow v_1 = \frac{0,01}{0,1^2 \pi} = \frac{0,01}{0,00785} \Rightarrow v_1 = 1,27 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{D_2^2 \pi / 4} \Rightarrow v_2 = \frac{0,01}{0,05^2 \pi} = \frac{0,01}{0,0019625} \Rightarrow v_2 = 5,09 \text{ m/s}$$

$$\Delta H = \xi_{ul} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \xi_k \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_2}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_3}{D_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} + 2\xi_k \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_4}{D_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_5}{D_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,5 \frac{1,27^2}{2g} + 0,021 \frac{5,0}{0,1} \cdot \frac{1,27^2}{2g} + 0,3 \frac{1,27^2}{2g} + 0,021 \frac{5,0}{0,1} \cdot \frac{1,27^2}{2g} + 0,023 \frac{5,0}{0,05} \cdot \frac{5,09^2}{2g} + 2 \cdot 0,3 \frac{5,09^2}{2g} + 0,023 \frac{2,0}{0,05} \cdot \frac{5,09^2}{2g} + 0,023 \frac{5,0}{0,05} \cdot \frac{5,09^2}{2g} + 1,0 \frac{5,09^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,0411 + 0,0863 + 0,0246 + 0,0863 + 3,037 + 0,792 + 1,215 + 3,037 + 1,321$$

$$\Delta H = 9,64 \text{ m}$$

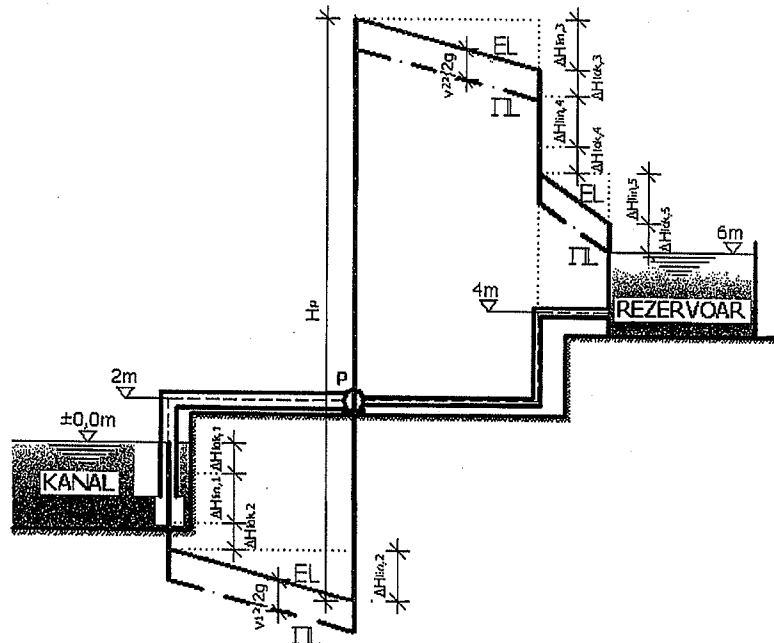
Jednačina (1):

$$H_p = 8,0 + \Delta H \Rightarrow H_p = 8,0 + 9,64 \Rightarrow H_p = 17,64 \text{ m}$$

Snaga pumpe:

$$N_p = \frac{\rho g \cdot Q \cdot H_p}{\eta} \Rightarrow N_p = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,01 \cdot 17,64}{0,75} = \frac{1730,48}{0,75}$$

$$N_p = 2307,31 W = 2,307 kW$$

Energetska i pijezometarska linija:**Minimalni pritisak u cjevovodu:**

Minimalni pritisak u cjevovodu javlja se neposredno ispred pumpe (II linija).

Bernoullieva jednačina (nivo vode u kanalu – presjek ispred pumpe)

$$z_k + \frac{p_k}{\rho g} + \frac{v_k^2}{2g} + H_p = z_p + \frac{p_p}{\rho g} + \frac{v_p^2}{2g} + \Delta H \text{ referentna ravan = nivo vode u kanalu}$$

$$\frac{p_k}{\rho g} = 0 ; \frac{v_k^2}{2g} = 0$$

$$v_1 = v_2 = 1,27 m/s$$

$$0 = 2,0 + \frac{p_p}{\rho g} + \frac{1,27^2}{2g} + \Delta H$$

$$0 = 2,0 + \frac{p_p}{\rho g} + \frac{1,27^2}{2g} + \xi_{ul} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \xi_k \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_2}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

$$0 = 2,0 + \frac{p_p}{\rho g} + \frac{1,27^2}{2g} + 0,5 \frac{1,27^2}{2g} + 0,021 \frac{5,0}{0,1} \cdot \frac{1,27^2}{2g} + 0,3 \frac{1,27^2}{2g} + 0,021 \frac{5,0}{0,1} \cdot \frac{1,27^2}{2g}$$

$$0 = 2,0 + \frac{p_p}{\rho g} + 0,0822 + 0,0411 + 0,0863 + 0,0246 + 0,0863$$

$$0 = 2,0 + \frac{p_p}{\rho g} + 0,3205 \Rightarrow \frac{p_p}{\rho g} = -2,3205$$

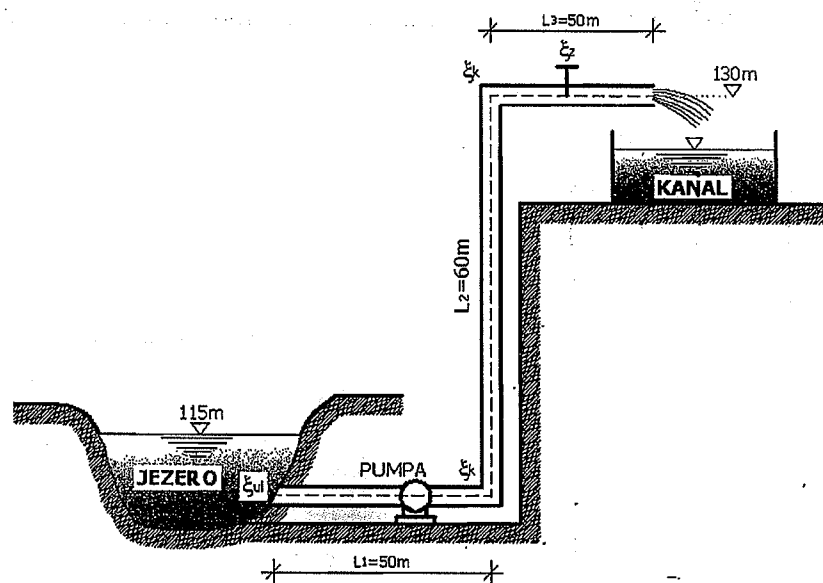
$$p_p = 1000 \cdot 9,81 \cdot (-2,3205) \Rightarrow p_p = -22764,11 Pa = -22,764 kPa$$

Zadatak 6.7.12.

Kanal treba cijevnim sistemom da se iz jezera snabdjeva sa 0,03 m³/s vode, prema datoj slici. Nivo vode u jezera je konstantan i iznosi 115 mm, a nivo ose kraja cijevnog sistema nalazi se na koti 130 mm.

- Odrediti je li tečenje vode između jezera i kanala laminarno ili turbulentno.
- Izračunati potrebnu efektivnu snagu pumpe.
- Nacrtati liniju energije i liniju pritiska između dva presjeka (jezero i kanal).

Zadato: $L_1=50$ m ; $L_2=60$ m ; $L_3=50$ m ; $d=200$ mm ; $\lambda=0,03$; $\xi_k=0,29$; $\xi_{zat}=3,0$; $\xi_{ul}=0,5$; $\xi_{izl}=1,0$; $\eta=0,8$; $v=1 \cdot 10^{-6}$ m²/s.



RJEŠENJE

a) Određivanje vrste tečenja (laminarno ili turbulentno):

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{d^2 \pi}{4}} \Rightarrow v = \frac{0,03}{\frac{0,2^2 \pi}{4}} = \frac{0,03}{0,0314} \quad v = 0,955 \text{ m/s}$$

$$R_e = \frac{v \cdot d}{\nu} \Rightarrow R_e = \frac{0,955 \cdot 0,2}{1 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow R_e = 191000 \quad \text{turbulentno}$$

b) Određivanje efektivne snage pumpe:

Bernoullieva jednačina (jezero – kraj cjevovoda)

$$z_j + \frac{p_j}{\rho g} + \frac{v_j^2}{2g} + h_{pum} = z_c + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{v_c^2}{2g} + \Delta H$$

$$\frac{p_j}{\rho g} = 0; \quad \frac{v_j^2}{2g} = 0; \quad \frac{p_c}{\rho g} = 0$$

$$115 + 0 + 0 + h_{pum} = 130 + \frac{v_c^2}{2g} + \Delta H$$

$$h_{pum} = 130 - 115 + \frac{v_c^2}{2g} + \Delta H$$

$$\Delta H = \Delta H_{lin} + \Delta H_{lok}$$

$$h_{pum} = 15 + \frac{0,955^2}{2g} + \Delta H \Rightarrow h_{pum} = 15 + 0,05 + \Delta H$$

$$h_{pum} = 15,05 + \Delta H$$

$$h_{pum} = 15,05 + \lambda \frac{L_1}{d} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda \frac{L_2}{d} \cdot \frac{v_2^2}{2g} + \lambda \frac{L_3}{d} \cdot \frac{v_3^2}{2g} + \frac{v_c^2}{2g} (\xi_{ul} + 2\xi_k + \xi_{zai} + \xi_{izl})$$

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_c$$

$$h_{pum} = 15,05 + 0,03 \frac{50}{0,2} \cdot \frac{0,955^2}{2g} + 0,03 \frac{60}{0,2} \cdot \frac{0,955^2}{2g} + 0,03 \frac{50}{0,2} \cdot \frac{0,955^2}{2g} + \frac{0,955^2}{2g} (0,5 + 2 \cdot 0,29 + 3,0 + 1,0)$$

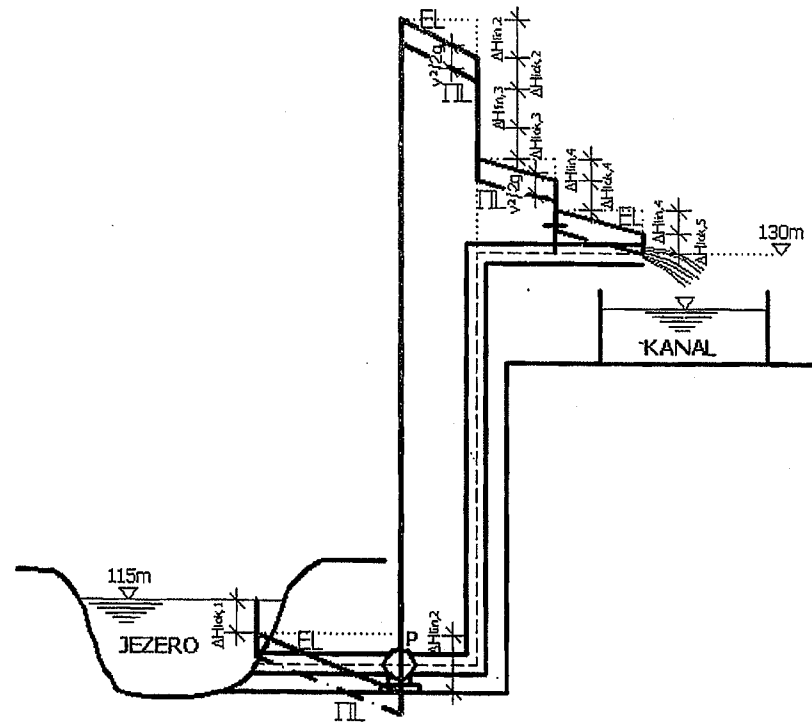
$$h_{pum} = 15,05 + 0,348 + 0,418 + 0,348 + 0,04648 \cdot 5,08$$

$$h_{pum} = 16,40 \text{ m}$$

$$N_{ef} = \frac{\rho g \cdot Q \cdot h_{pum}}{\eta} \Rightarrow N_{ef} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,03 \cdot 16,40}{0,8} = \frac{4826,52}{0,8}$$

$$N_{ef} = 6033,15 \text{ W} = 6,033 \text{ kW}$$

c) Energetska i piježometarska linija:

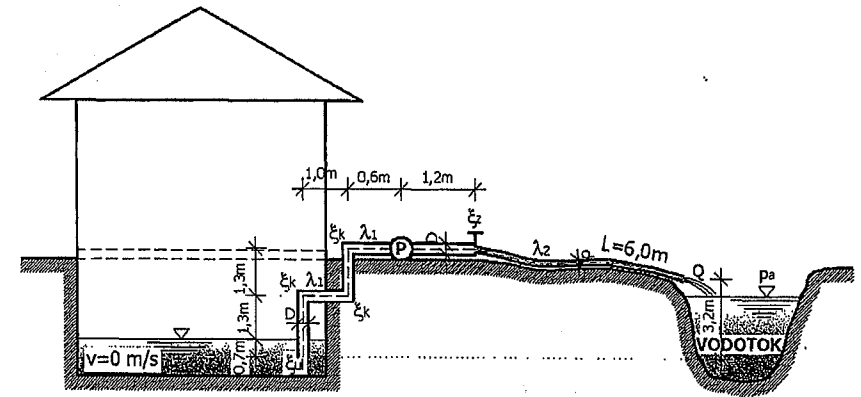
**Zadatak 6.7.13.**

Zbog pucanja vodovodne cijevi došlo je do plavljenja podruma u stambenom objektu. Pomoću pumpnog sistema trebamo vodu iz podruma transportovati do vodotoka, prema datoj slici. Ovaj sistem se sastoji od čvrste cijevi prečnika 40mm sa pumpom i savitljivog crijeva (cijevi) dužine $L=6,0\text{m}$ i prečnika 30mm. Odmah iza zatvarača nalazi se početak savitljive cijevi.

a) Izračunati potrebnu snagu pumpe tako da je moguće transportovati količinu vode $Q=120\text{ l/min}$ iz podruma u vodotok. Iskoristivost pumpe iznosi 60%.

b) Izračunati pritisak u cijevi neposredno ispred pumpe.

Zadato: $\rho_v=1000\text{ kg/m}^3$; $g=9,81\text{ m/s}^2$; $\xi_{ul}=0,5$; $\xi_k=0,3$; $\xi_{za}=0,4$; $D=40\text{ mm}$; $d=30\text{ mm}$; $L=6,0\text{ m}$; $Q=120\text{ l/min}$; $\eta=0,6$; $\lambda_1=0,038$ (čvrsta cijev); $\lambda_2=0,031$ (savitljiva cijev).



RJEŠENJE

a) Određivanje potrebne snage pumpe:

$$Q = 120\text{ l/min} = 0,002\text{ m}^3/\text{s}$$

Brzina tečenja u čvrstoj cijevi:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\frac{D^2 \pi}{4}} \Rightarrow v_1 = \frac{0,002}{\frac{0,04^2 \pi}{4}} = \frac{0,002}{0,00001256} \Rightarrow v_1 = 1,59\text{ m/s}$$

Brzina tečenja u savitljivoj cijevi:

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\frac{d^2 \pi}{4}} \Rightarrow v_2 = \frac{0,002}{\frac{0,03^2 \pi}{4}} = \frac{0,002}{0,0007065} \Rightarrow v_2 = 2,83\text{ m/s}$$

Bernoullieva jednačina (nivo vode u podrumu – nivo vode u vodotoku)

$$z_p + \frac{p_p}{\rho g} + \frac{v_p^2}{2g} + H_{man} = z_v + \frac{p_v}{\rho g} + \frac{v_v^2}{2g} + \Delta H$$

$$z_p = 0 ; \frac{p_p}{\rho g} = 0 ; \frac{v_p^2}{2g} = 0$$

$$\Delta H = \xi_{ul} \frac{v_1^2}{2g} + 3\xi_k \frac{v_1^2}{2g} + \xi_{zat} \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_c}{D} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L}{d} \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{jednačina (1)}$$

$$L_c = 0,7 + 1,3 + 1,0 + 1,3 + 0,6 + 1,2 \Rightarrow L_c = 6,1m$$

$$H_{man} = z_c + \frac{p_v}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H$$

$$H_{man} = z_c + \frac{p_v}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H$$

$$H_{man} = (3,2 - 0,7) + \frac{2,83^2}{2g} + \Delta H$$

$$H_{man} = 2,50 + 0,41 + \Delta H \quad \text{jednačina (2)}$$

Jednačina (1):

$$\Delta H = 0,5 \frac{1,59^2}{2g} + 3 \cdot 0,3 \frac{1,59^2}{2g} + 0,4 \frac{2,83^2}{2g} + 0,038 \frac{6,1}{0,04} \frac{1,59^2}{2g} + 0,031 \frac{6,0}{0,03} \frac{2,83^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,064 + 0,116 + 0,163 + 0,746 + 2,531 \Rightarrow \Delta H = 3,62m$$

Jednačina (2):

$$H_{man} = 2,50 + 0,41 + 3,62 \Rightarrow H_{man} = 6,53m$$

Snaga pumpe:

$$N = \frac{\rho g \cdot Q \cdot H_{man}}{\eta} \quad N = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,002 \cdot 6,53}{0,6} = \frac{128,12}{0,6}$$

$$N = 213,53W = 0,21353kW$$

b) **Određivanje pritiska u cijevi neposredno ispred pumpe:**

Bernoullieva jednačina (početak cijevi – presjek ispred pumpe) 0,7

$$z_p + \frac{p_p}{\rho g} + \frac{v_p^2}{2g} = z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + \Delta H \quad \text{jednačina (3)}$$

$$\Delta H = \xi_{ul} \frac{v_1^2}{2g} + 3 \cdot \xi_k \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L}{D} \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{jednačina (4)}$$

$$L = 0,7 + 1,3 + 1,0 + 1,3 + 0,6 = 4,9m$$

Jednačina (3):

$$0 + \frac{p_p}{\rho g} + 0 = (0,7 + 1,3 + 1,3) + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \Delta H$$

$$p_p = \rho g \cdot h \Rightarrow p_p = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,7 \Rightarrow p_p = 6867,0N/m^2$$

$$\frac{p_p}{\rho g} = \frac{6867,0}{1000 \cdot 9,81} \Rightarrow \frac{p_p}{\rho g} = 0,7m$$

Jednačina (3):

$$0 + 0,7 + 0 = 3,3 + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{1,59^2}{2g} + \Delta H$$

$$0,7 = 3,3 + \frac{p_A}{\rho g} + 0,128 + \Delta H$$

Jednačina (4):

$$\Delta H = 0,5 \frac{1,59^2}{2g} + 3 \cdot 0,3 \frac{1,59^2}{2g} + 0,038 \frac{4,9}{0,04} \frac{1,59^2}{2g}$$

$$\Delta H = 0,064 + 0,116 + 0,599 \Rightarrow \Delta H = 0,779m$$

Jednačina (3):

$$0,7 = 3,3 + \frac{p_A}{\rho g} + 0,128 + 0,779 \Rightarrow \frac{p_A}{\rho g} = -3,507m$$

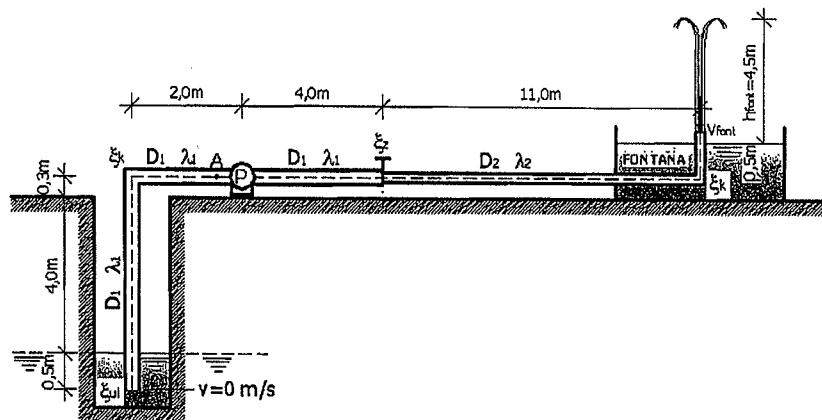
$$\frac{p_A}{\rho g} = -3,507 \Rightarrow p_A = -34403,67N/m^2$$

Zadatak 6.7.14.

Planira se gradnja nove fontane u gradskom parku. Za opskrbu vodom fontane potrebno je staru parkovsku fontanu sa usisnom pumpom koristiti, kao i postojeći cijevni sistem (D₁). Na postojeći cijevni sistem nastavlja se cijev D₂, iza zatvarača, prema slici, sa potrebnom visinom dizanja vode u fontani od h_{font}=4,5m.

- Izračunati izlaznu brzinu fontane (vode u fontani) v_{font}, ukoliko je potrebna željena visina vode u fontani h_{font}=4,5m.
- Izračunati manometarsku visinu h_{man}.
- Koristimo pumpu snage N=9,5 kW. Ako je koeficijent korisnog dejstva pumpe η=0,8 provjeriti da li odabrana pumpa odgovara.
- Izračunati veličinu pritiska u cijevi, u tački A, neposredno ispred pumpe. Obrazložiti dobijeni rezultat.

Zadato: ρ_v=1000 kg/m³; g=9,81 m/s²; ξ_{ul}=0,35; ξ_k=0,5; ξ_{zat}=0,6; N=9,5 kW; η=0,8; D₁=75 mm; D₂=50 mm; h_{font}=4,5 m; λ₁=0,024; λ₂=0,025.

**RJEŠENJE****a) Određivanje izlazne brzine fontane:**

Bernoullieva jednačina (nivo vode u fontani – presjek koji odgovara h_{font})

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$z_0 = 0; \frac{p_0}{\rho g} = 0; z_1 = h_{font}; \frac{p_1}{\rho g} = 0; \frac{v_1^2}{2g} = 0$$

$$\frac{v_{font}^2}{2g} = h_{font} \Rightarrow v_{font}^2 = 2g \cdot h_{font} \Rightarrow v_{font} = \sqrt{2g \cdot h_{font}}$$

$$v_{font} = \sqrt{2g \cdot 4,5} \Rightarrow v_{font} = 9,39 \text{ m/s}$$

b) Određivanje manometarske visine h_{man}:

Bernoullieva jednačina (nivo vode u bunaru – izlaz mlaza vode u fontani)

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} + h_{man} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \Sigma h_{lin} + \Sigma h_{tok}$$

$$\Sigma H = \Sigma h_{lin} + \Sigma h_{tok}$$

$$h_{man} = 4,8 + \frac{v_{font}^2}{2g} + \Sigma H \Rightarrow h_{man} = 4,8 + \frac{9,39^2}{2g} + \Sigma H \quad \text{jednačina (1)}$$

$$Q = A \cdot v_{font} \Rightarrow Q = \frac{0,05^2 \pi}{4} \cdot 9,39 \Rightarrow Q = 0,0184 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} \Rightarrow v_1 = \frac{0,0184}{\frac{0,075^2 \pi}{4}} = \frac{0,0184}{0,00442} \Rightarrow v_1 = 4,16 \text{ m/s}$$

$$\Sigma h_{tok} = \xi_{ul} \frac{v_1^2}{2g} + \xi_k \frac{v_1^2}{2g} + \xi_{zat} \frac{v_{font}^2}{2g} + \xi_k \frac{v_{font}^2}{2g}$$

$$\Sigma h_{tok} = 0,35 \frac{4,16^2}{2g} + 0,5 \frac{4,16^2}{2g} + 0,6 \frac{9,39^2}{2g} + 0,5 \frac{9,39^2}{2g}$$

$$\Sigma h_{tok} = 0,308 + 0,441 + 2,696 + 2,247 \Rightarrow \Sigma h_{tok} = 5,692 \text{ m}$$

$$\Sigma h_{lin} = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \cdot \frac{v_{font}^2}{2g}$$

$$\Sigma h_{lin} = 0,024 \frac{4,8 + 6,0}{0,075} \cdot \frac{4,16^2}{2g} + 0,025 \frac{11,5}{0,05} \cdot \frac{9,39^2}{2g}$$

$$\Sigma h_{lin} = 3,048 + 25,841 \Rightarrow \Sigma h_{lin} = 28,889m$$

Jednačina (1):

$$h_{man} = 4,8 + \frac{9,39^2}{2g} + 5,692 + 28,889 \Rightarrow h_{man} = 43,875m$$

c) Provjera postojeće (planirane) pumpe u novoj fontani:

$$N_{bruto} = \frac{\rho g \cdot Q \cdot h_{man}}{\eta} \Rightarrow N_{bruto} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,0184 \cdot 43,875}{0,8}$$

$$N_{bruto} = 9899,52W = 9,899kW \Rightarrow N_{bruto} = 9,899kW > N_{post} = 9,5kW$$

Objasnenje:

Postojeća odnosno planirana pumpa snage $N=9,5$ kW ne odgovara za zahtijevanu visinu vode u fontani (h_{fon}) i date karakteristike cijevnog sistema.

d) Određivanje pritiska u tački A (neposredno ispred pumpe):

Bernoullieva jednačina (nivo vode u bunaru – tačka A)

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + \Sigma H$$

$$z_0 = 0 ; \frac{p_0}{\rho g} = 0 ; \frac{v_0^2}{2g} = 0 ; z_A = 4,3m$$

$$0 = z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} + \Sigma H \Rightarrow 0 = 4,3 + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{4,16^2}{2g} + \Sigma H$$

$$0 = 4,3 + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{4,16^2}{2g} + \xi_{ul} \frac{v_1^2}{2g} + \xi_k \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_A}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

$$0 = 4,3 + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{4,16^2}{2g} + 0,35 \frac{4,16^2}{2g} + 0,5 \frac{4,16^2}{2g} + 0,024 \frac{6,8}{0,075} \cdot \frac{4,16^2}{2g}$$

$$0 = 4,3 + \frac{p_A}{\rho g} + 0,882 + 0,308 + 0,441 + 1,919$$

$$0 = \frac{p_A}{\rho g} + 7,85 \Rightarrow \frac{p_A}{\rho g} = -7,85$$

$$p_A = -(1000 \cdot 9,81 \cdot 7,85) \Rightarrow p_A = -77008,5N/m^2 = -77,008kN/m^2$$

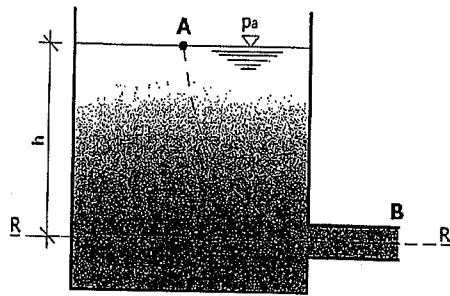
Objasnenje:

Ispred pumpe (tačka A) javlja se podpritisak tako da postoji rizik da sistem neće funkcionisati zbog „presušivanja“ vode u zahvatu ili će pumpa biti oštećena pojavom kavitacije.

7. ISTJECANJE TEČNOSTI KROZ OTVORE

7.1. Istjecanje kroz male otvore – nepotopljeno istjecanje

Istjecanje je dosta česta pojava u hidrotehničkoj praksi, a može se manifestovati kao istjecanje iz nekog rezervoara sa kratkom izlaznom cijevi ili kao istjecanje kroz otvor koji se nalazi na samom zidu rezervoara. Istjecanje se obično dešava u ustaljenim uslovima tečenja gdje je pritisak iznad tečnosti koja se nalazi u rezervoaru kao zatvorenoj posudi konstantan ili je nivo tečnosti u rezervoaru konstantan ili nepromjenjiv. Istjecanje kroz male otvore je takvo istjecanje iz neke posude ili obično rezervoara gdje je taj otvor toliko mali da možemo uzeti da je hidrostatički pritisak isti na čitavoj njegovoj površini odnosno otvor je tako mali da možemo zanemariti promjenu hidrostatičkog pritiska preko površine otvora.



Slika 7.1 Istjecanje iz rezervoara kroz mali otvor

Na slici 7.1 prikazano je istjecanje kroz mali otvor iz rezervoara sa slobodnim vodnim licem. Otvor se nalazi na dubini h od nivoa tečnosti u rezervoaru do ose kratke cijevi odnosno ose malog otvora. Referentna ravan prolazi osom otvora. Ako promatramo jednu strujnicu od površine tečnosti u rezervoaru do ose izlaznog otvora, onda Bernoullieva jednačina se može napisati u obliku:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.1)$$

$$z_A = h ; p_A = p_B = p_a ; z_B = 0 \quad (7.2)$$

$$h + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = 0 + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.3)$$

Pošto je riječ o istjecanju kroz mali otvor iz rezervoara, smatramo da je rezervoar dovoljno veliki da se brzina tečenja na površini vodnog lica može zanemariti odnosno smatramo da je $v_A = 0$ m/s, a na površini vodnog lica kao i na mjestu istjecanja iz rezervoara vlada atmosferski pritisak, pa izraz 7.3 se može napisati u slijedećem obliku:

$$h + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_B^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.4)$$

$$v_B^2 = 2g \cdot h \quad (7.5)$$

$$v_B = \sqrt{2g \cdot h} \quad (7.6)$$

Ovo je tzv. Torricelliev izraz za istjecanje iz posude odnosno rezervoara u našem slučaju. Na osnovu izraza 7.6 može se zaključiti da brzina istjecanja u Torricellievom izrazu odgovara brzini padanja tijela sa neke visine h . U izrazima od 7.1 do 7.6 zanemaren je lokalni gubitak koji se javlja prilikom strujanja fluida na izlaznoj kratkoj cijevi iz rezervoara, odnosno:

$$h_{lok} = \xi \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.7)$$

Kada se uzme u obzir i lokalni gubitak energije koji se realno javlja pri istjecanju iz rezervoara ili neke druge posude, onda izraz 7.4 se može napisati kao:

$$h = \frac{v_B^2}{2g} + h_{lok} \quad (7.8)$$

$$h = \frac{v_B^2}{2g} + \xi \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.9)$$

Iz izraza 7.9 može se, nakon sređivanja, napisati izraz za brzinu istjecanja kroz mali otvor:

$$v_B = \sqrt{\frac{2g \cdot h}{1 + \xi}} \quad (7.10)$$

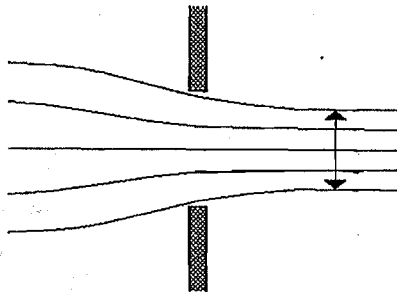
Prema izrazu 7.10 se zaključuje da kod realne tečnosti (uzimajući u obzir lokalni gubitak na mjestu istjecanja iz rezervoara) brzina istjecanja v_B je nešto manja od tzv. Torricellieve brzine istjecanja date izrazom 7.6. U ovom slučaju u praksi se umjesto koeficijenta lokalnog gubitka (ξ) primjenjuje koeficijent smanjenja brzine φ , koji se izražava preko koeficijenta lokalnog gubitka ξ :

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}} \quad (7.11)$$

Sada se može brzina istjecanja realnog fluida izraziti preko tzv. Torricellieve brzine istjecanja (v_{Tor}):

$$v_B = \varphi \cdot v_{Tor} \quad (7.12)$$

Posebno je važno je napomenuti da se koeficijent smanjenja brzine (φ) određuje eksperimentalnim putem, a možemo postići da koeficijent smanjenja brzine iznosi $\varphi=0,98$ ukoliko zaobljimo na odgovarajući način rubove izlaznog otvora. Kod zaobljenog izlaznog otvora može se primjetiti smanjenje površine poprečnog presjeka izlaznog mlaza tečnosti ili tzv. kontrakcija (suženje) mlaza koja se može opisati pomoću koeficijenta kontrakcije ili koeficijenta suženja (μ).



Slika 7.2 Kontrakcija ili suženje mlaza kod istjecanja iz posude ili rezervoara

Koeficijent kontrakcije ili suženja mlaza (μ) zavisi od površine poprečnog presjeka otvora na posudi ili rezervoara i od površine poprečnog presjeka izlaznog mlaza:

$$\mu = \frac{A_o}{A} \quad (7.13)$$

gdje je;

A_o – površina poprečnog presjeka suženog mlaza;

A – površina poprečnog presjeka malog otvora.

Takođe, i koeficijent kontrakcije ili suženja mlaza (μ) određuje se eksperimentalnim putem. Kada imamo poznatu ili određenu brzinu istjecanja realnog fluida shodno izrazu 7.12, onda se može odrediti i protok fluida Q . Protok Q određuje se uzimajući u obzir i smanjenje brzine nastalo zbog lokalnog gubitka i kontrakciju mlaza, pa imamo:

$$Q = A \cdot v \Rightarrow Q = A \cdot \varphi \cdot v_{Tor} \cdot \mu \quad (7.14)$$

U hidrotehničkoj praksi se umjesto koeficijenta smanjenja brzine (φ) i koeficijenta kontrakcije mlaza (μ) uvodi novi pojam koji se naziva jednostavno **koeficijent istjecanja** α koji predstavlja proizvod koeficijenta smanjenja brzine i koeficijenta kontrakcije mlaza, odnosno:

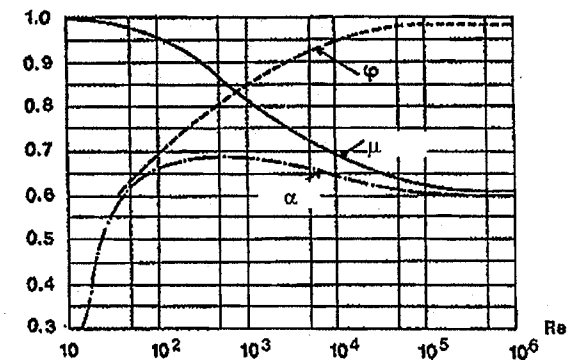
$$\alpha = \varphi \cdot \mu \quad (7.15)$$

Prema tome, protok Q (izraz 7.14) se može napisati u slijedećem obliku, uzimajući u obzir naprijed navedeno:

$$Q = \alpha \cdot A \cdot v_{Tor} \quad (7.16)$$

$$Q = \alpha \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h} \quad (7.17)$$

Veličina koeficijenta istjecanja α zavisi od oblika otvora., a može se na osnovu provedenih eksperimenata i Reynoldsovog broja, odrediti iz dijagrama prikazanog na slici 7.3.



Slika 7.3 Dijagram koeficijenta istjecanja kroz mali otvor

Veličinu Reynoldsovog broja dobit ćemo preko izraza:

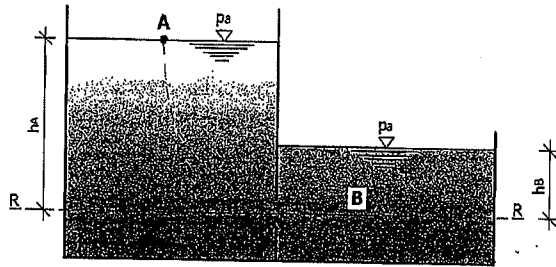
$$Re = \frac{\sqrt{2g \cdot h} \cdot D}{\nu} \quad (7.18)$$

U izrazu 7.18. D predstavlja prečnik malog otvora, tako da za okrugli otvor oštih ivica (rubova) koeficijent istjecanja $\alpha=0,61$. Iz dijagrama prikazanog na slici 7.3 može se vidjeti da za velike vrijednosti Reynoldsovog broja ($Re > 10^5$)

veličine koeficijenta smanjenja brzine, koeficijenta kontrakcije kao i koeficijenta istjecanja dobijaju gotovo konstantne vrijednosti. Posebno zanimljivo je da se na osnovu eksperimenata pokazalo da vrijednosti koeficijenta istjecanja α za potopljeno istjecanje se gotovo uopšte ne razlikuju od tog istog koeficijenta za slučaj nepotopljenog istjecanja.

7.2. Istjecanje kroz male otvore - potopljeno istjecanje

Potopljeno istjecanje kroz mali otvor javlja se obično na mjestu spoja cijevi sa rezervoarom gdje tečnost iz cijevi istječe odnosno utječe u rezervoar ili na mjestu istjecanja iz jedne komore rezervoara u drugu komoru. U tim slučajevima otvor cijevi koja utječe u rezervoar ili otvor iz komore rezervoara nalazi se ispod površine tečnosti (nivo vode) u rezervoaru ili drugoj komori pa imamo tzv. potopljeno istjecanje.



Slika 7.4 Istjecanje kroz mali potopljeni otvor

U ovom slučaju, kao što je prikazano na slici 7.4, na mjestu istjecanja tečnosti iz rezervoara javit će se odgovarajući hidrostatički pritisak koji zavisi od dubine tečnosti na mjestu istjecanja. Na osnovu slike može se napisati Bernoullieva jednačina od tačke A do tačke B, da bi se odredila brzina istjecanja tečnosti, uzimajući da je referentna ravan osa potopljenog otvora:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.19)$$

$$z_A = h_A ; z_B = 0 ; \frac{p_A}{\rho g} = 0 ; \frac{v_A^2}{2g} = 0 \quad (7.20)$$

$$h_A + 0 + 0 = 0 + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.21)$$

$$p_B = p_a + \rho g \cdot h_B \quad (7.22)$$

$$h_A = \frac{p_a + \rho g \cdot h_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.23)$$

$$h_A = h_B + \frac{v_B^2}{2g} \Rightarrow \frac{v_B^2}{2g} = h_A - h_B \quad (7.24)$$

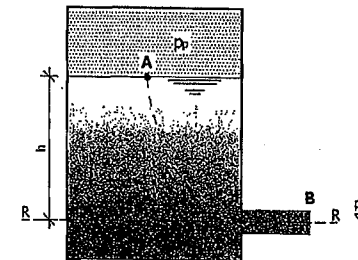
$$v_B^2 = 2g \cdot (h_A - h_B) \quad (7.25)$$

$$v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)} \quad (7.26)$$

Izraz 7.26 predstavlja Torricelliev izraz za brzinu istjecanja, pa se može napisati da je $v_B = v_{Tor}$. Kod istjecanja realne tečnosti mora se u obzir uzeti koeficijent smanjenja brzine i koeficijent istjecanja. U tom slučaju izraz 7.14 za određivanje protoka kao i izraz 7.26 ostaju isti.

7.3. Istjecanje kroz mali otvor iz posuda pod pritiskom

Ukoliko posmatramo jednu zatvorenu posudu (posudu pod pritiskom) u kojoj se nalazi tečnost gustine ρ onda se pritisak javlja na lijevoj strani Bernoullieve jednačine (slika 7.5). Postavit ćemo Bernoullievu jednačinu od tačke A do tačke B.



Slika 7.5 Istjecanje iz posude pod pritiskom

Ako se postavi da referentna ravan prolazi osom otvora promatrane posude pod pritiskom onda se može napisati:

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.27)$$

$$z_A = h ; z_B = 0 ; \frac{p_B}{\rho g} = 0 ; \frac{v_A^2}{2g} = 0 \quad (7.28)$$

$$h + \frac{p_a + \Delta p}{\rho g} + 0 = 0 + 0 + \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.29)$$

$$h + \frac{p_a + \Delta p}{\rho g} = \frac{v_B^2}{2g} \quad (7.30)$$

U izrazu 7.30 veličina $p_a + \Delta p$ predstavlja apsolutni pritisak koji je jednak zbiru atmosferskog pritiska i relativnog pritiska. Iz prethodnog izraza se može napisati

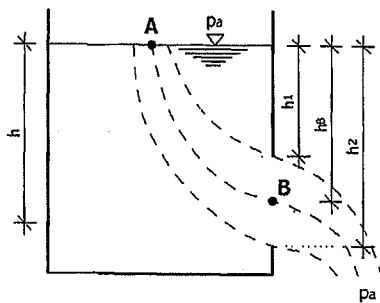
brzina istjecanja iz posude pod pritiskom, poznavajući uslov $\frac{p_a}{\rho g} = 0$:

$$\frac{v_B^2}{2g} = h + \frac{\Delta p}{\rho g} \Rightarrow v_B^2 = 2g \left(h + \frac{\Delta p}{\rho g} \right) \quad (7.31)$$

$$v_B = \sqrt{2g \left(h + \frac{\Delta p}{\rho g} \right)} \quad (7.32)$$

7.4. Istjecanje kroz veliki otvor

Bitna razlika između istjecanja kroz veliki otvor u odnosu na istjecanje kroz mali otvor je u pojavi hidrostatičkog pritiska na gornjoj i donjoj strani velikog otvora. Drugim riječima, kod istjecanja kroz veliki otvor mora se uzeti u obzir hidrostatički pritisak u odnosu na gornji rub otvora koji je manji od hidrostatičkog pritiska u odnosu na donji rub velikog otvora, a razlika u hidrostatičkom pritisku je upravo veličina velikog otvora kroz kojeg tečnost istječe.



Slika 7.6 Istjecanje kroz veliki otvor

Ako na slici 7.6 promatramo jednu strujnicu od tačke A do tačke B, na osnovu dosadašnjih saznanja, znamo da će prema Torricellievom izrazu brzina istjecanja u tački B biti veća od brzine istjecanja u odnosu na gornji rub velikog

otvora i bit će manja u odnosu na donji rub velikog otvora. Razlog tome je što brzina istjecanja kroz otvor zavisi od dubine odnosno od položaja otvora ili u ovom slučaju kod velikog otvora zavisi od položaja tačke u kojoj mjerimo brzinu istjecanja. Vidi se sa slike da dubina gornjeg ruba velikog otvora iznosi h_1 , a dubina istjecanja donjeg ruba otvora iznosi h_2 , dok dubina istjecanja promatrane tačke B iznosi h_B . Prema tome, brzina istjecanja u odnosu na tačku B iznosi:

$$v_B \approx \sqrt{2g \cdot h_B} \quad (7.33)$$

Takođe, vidi se da je izraz 7.33 približan pošto smatramo da u tački B vlada atmosferski pritisak iako u realnim uslovima se pritisak u tački B razlikuje od atmosferskog za veličinu tzv. radijalnog pritiska koji nastaje usljed zakrivljenog oblika strujnice. Međutim, radijalni pritisak je veoma mali pa kod jednostavnih proračuna ga možemo zanemariti, ali promjenu brzine istjecanja po visini velikog otvora ne možemo zanemariti, tako da protok Q se može odrediti integriranjem preko površine velikog otvora. Protok Q kod velikog otvora odredimo za usku horizontalnu površinu koja se nalazi na dubini h unutar otvora. Ta horizontalna površina je visine Δh dok je širina otvora b . Na osnovu toga se može napisati izraz za protok kod velikog otvora u slijedećem obliku:

$$dQ = \mu \cdot b \cdot \sqrt{2gh} dh \quad (7.34)$$

Ukupan protok Q predstavlja integral preko čitave površine velikog otvora, na slici 7.6, (od gornjeg ruba do donjeg ruba otvora) i piše se u obliku:

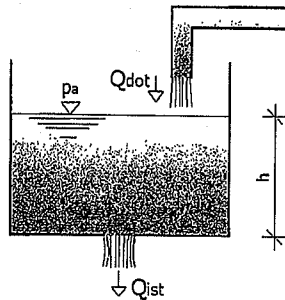
$$Q = \int_{h_1}^{h_2} dQ \quad (7.35)$$

Da bi se odredio protok odnosno veličina istjecanja kroz veliki otvor treba da uzmemo u obzir zavisnost širine otvora b od dubine h , tako da ako se promatra istjecanje kroz pravougaoni veliki otvor (jednostavan slučaj istjecanja) onda ukupan protok Q kroz takav veliki otvor može se dobiti na osnovu slijedećeg izraza:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right) \quad (7.36)$$

7.5. Nestacionarno (neustaljeno) istjecanje

Ukoliko pri isticanju iz rezervoara ili neke posude dolazi do smanjenja nivoa tečnosti onda u tom slučaju se određene veličine u izrazu za Bernoullievu jednačinu mijenjaju u funkciji vremena, te se može reći da imamo nestacionarno ili neustaljeno istjecanje. Međutim, u slučaju kada su ove promjene nekih članova u Bernoullievoj jednačini prilično spore onda i dalje rješenje može se odrediti kao u slučaju ustaljenog ili stacionarnog istjecanja. Ipak, i dalje se mora znati da su neke veličine iz Bernoullieve jednačine promjenjive sa vremenom.



Slika 7.7 Istjecanje iz rezervoara koji se istovremeno puni sa određenom tečnošću

Za objašnjenje nestacionarnog ili neustaljenog istjecanja može se promatrati primjer jednog rezervoara na čijem dnu postoji otvor preko koga tečnost istječe iz njega, ali se istovremeno rezervoar puni istom tečnošću na svom vrhu preko neke cijevi (slika 7.7). Istjecanje preko otvora na dnu rezervoara odnosno protok Q zavisi od površine poprečnog presjeka otvora na dnu rezervoara, Torricellieve brzine istjecanja i koeficijenta istjecanja α , pa se može napisati:

$$Q_{ist} = \alpha A \sqrt{2g \cdot h} \quad (7.37)$$

Iz izraza 7.37 vidi se da količina tečnosti koja istječe iz rezervoara zavisi od trenutne dubine vode u njemu. Ukoliko istovremeno sa istjecanjem tečnosti kroz otvor na dnu rezervoara, u njega dotiče protok Q_{dot} koji smatramo konstantnim, onda će se u toku određenog vremenskog perioda nivo tečnosti u rezervoaru mijenjati sve dok se u potpunosti ne izjednači količina tečnosti koja istječe iz rezervoara sa količinom koja u njega dotiče (slika 7.7). Dubinu tečnosti u rezervoaru pri kojoj ćemo imati tzv. ravnotežno stanje (ista količina tečnosti koja istječe sa količinom tečnosti koja dotiče u rezervoar), odredit ćemo na osnovu uslova da je $Q_{dot} = Q_{ist}$, pa sređivanjem dobijamo:

$$h_0 = \frac{Q_{dot}^2}{2g(\alpha A)^2} \quad (7.38)$$

Ukoliko imamo slučaj da je početna dubina tečnosti u rezervoaru veća od tzv. dubine koja odgovara ravnotežnom stanju (izraz 7.38), onda će se ona vremenom smanjivati dok se ne ostvari ravnotežna vrijednost dubine u rezervoaru. Važi i obrnuto, ukoliko je početna dubina u rezervoaru manja od dubine koja odgovara ravnotežnom stanju, nivo tečnosti u rezervoaru će vremenom rasti odnosno povećavati se. Postavlja se pitanje: Kako odrediti potrebno vrijeme da se nivo neke tečnosti u rezervoaru promjeni sa dubine h_1 na dubinu h_2 ? Tu polazimo od činjenice da je smanjenje zapremine tečnosti u promatranom rezervoaru u nekom vremenu dt jednako razlici zapremina tečnosti koja istječe iz rezervoara i zapremini tečnosti koja u tom istom vremenu dt u njega dotječe, odnosno:

$$A_{rez} dh = Q_{dot} dt - \alpha A \sqrt{2g \cdot h} dt \quad (7.39)$$

Integriranjem prethodnog izraza može se dobiti traženo vrijeme, koje u konačnici dobija slijedeći oblik:

$$t_{1,2} = \frac{1}{\alpha A_{orv} \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{A_{rez}(h) dh}{\sqrt{h_0} - \sqrt{h}} \quad (7.40)$$

Kao što se vidi iz izraza 7.40, da bi se moglo odrediti traženo vrijeme, moramo prvo znati na koji način površina poprečnog presjeka rezervoara (A_{rez}) zavisi od dubine tečnosti u rezervoaru (h). Ako se u određenom trenutku vremena prekinje sa dotjecanjem tečnosti u rezervoar, onda će usljed istjecanja kroz otvor na dnu rezervoara u nekom vremenskom intervalu doći do potpunog pražnjenja rezervoara. Vrijeme koje je potrebno da se rezervoar potpuno isprazni može se odrediti na osnovu izraza:

$$t_0 = \frac{2A_{rez} \sqrt{h_1}}{\alpha A_{orv} \sqrt{2g}} \quad (7.41)$$

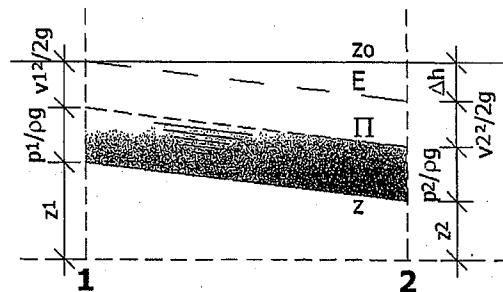
8. TEČENJE U OTVORENIM KANALIMA

8.1. Uvod

Tečenje u otvorenim kanalima (koritima) može biti u vještački izgrađenim kanalima i prirodnim vodnim tokovima, kao i u zatvorenim kanalima koji su djelimično ispunjeni tečnošću. U tim slučajevima tečnost sa svoje gornje strane ima dodirnu površinu sa atmosferom. Ta dodirna površina je približno ravna i naziva se **slobodna površina**. Tečenje sa slobodnom površinom je takvo tečenje sa granicom slobodnom površi tečnosti gdje se sve tačke slobodne površine nalaze pod istim atmosferskim pritiskom. Znači, na slobodnoj površini, hidrostatički pritisak je u ravnotežnom stanju sa atmosferskim pritiskom tako da je pijeziometarska linija jednaka liniji slobodne površine (nalazi se na liniji slobodne površine).

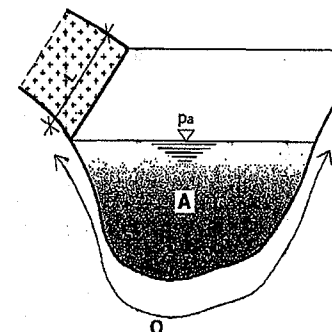
Važna razlika između tečenja u cijevima i tečenja u otvorenim kanalima je u tome što se kod tečenja u otvorenim kanalima ili prirodnim vodnim tokovima nivo tečnosti slobodno mijenja, te se time mijenja i hidraulički radijus. Takođe, trenje na granici između atmosfere i slobodne površine tečnosti je veoma malo i može se zanemariti. To znači da otpor tečenju nastaje samo u dijelu otvorenog kanala odnosno korita koji se nalazi ispod površine tečnosti u njemu, a to je tzv. okvašeni dio korita.

I kod otvorenih kanala rješavamo Bernoullievu jednačinu između dva presjeka, slično kao i kod tečenja u cijevima. Kod otvorenih korita (kanali ili prirodni vodni tokovi) geodetska visina (z) nalazi se na dnu korita dok se pijeziometarska linija (Π) podudara sa površinom tečnosti u otvorenom koritu zbog toga što na slobodnoj površini tečnosti vlada atmosferski pritisak. Kao i kod tečenja u cijevima tako i kod otvorenih korita, energetska linija (E) nalazi se iznad pijeziometarske linije (iznad površine tečnosti) za veličinu tzv. brzinske visine ($\frac{v^2}{2g}$), dok gubici koji nastaju tečenjem između dva odabrana presjeka predstavljaju pad energetske linije.



Slika 8.1 Grafički prikaz Bernoullieve jednačine kod otvorenog korita

Pad dna korita, pad pijeziometarske i energetske linije kao i pad slobodne površine su obično male veličine i lagano se mijenjaju. Uglavnom se radi o padovima koji se izražavaju u promilima. Kod otvorenih korita potrebno je poznavati površinu poprečnog presjeka korita, kao i okvašeni obim i hidraulički radijus.



Slika 8.2 Površina poprečnog presjeka (A) i okvašeni obim (O) otvorenog korita

Površina poprečnog presjeka (slika 8.2) predstavlja površinu omeđenu dnom korita, bočnim stranama korita i površinom tečnosti u koritu. Okvašeni obim (O) predstavlja dužinu dna korita i bočnih strana korita koji su u kontaktu sa tečnosti (okvašeni dio korita), a u okvašeni obim se ne računa dužina slobodne površine tečnosti iz razloga koji je već naveden, a to je što na slobodnoj površini trenje i ne postoji ili je veoma malo. Odnos između površine poprečnog presjeka otvorenog korita (A) i okvašenog obima (O) predstavlja tzv. hidraulički radijus (R).

Posmatrajući slike 8.1 i 8.2 mogu se odrediti padovi koji su karakteristični kod otvorenih korita. Ako sa L označimo rastojanje između dva presjeka u kojima se određuju potrebne veličine (postavljamo Bernoullievu jednačinu), onda u tom slučaju pad dna korita (I_d) može se napisati u obliku:

$$I_d = \frac{z_1 - z_2}{L} \quad (8.1)$$

Pad pijeziometarske linije jednak je padu slobodne površine tečnosti u otvorenom koritu (slika 8.1) pa to nazivamo zajedničkim imenom pad vodnog lica (I_{Π}) i može se napisati preko slijedećeg izraza:

$$z_{h1} = z_1 + h_1 \quad \Leftrightarrow \quad z_{h2} = z_2 + h_2$$

$$I_{\Pi} = \frac{z_{h1} - z_{h2}}{L} \quad (8.2)$$

Pad energetske linije (slika 8.1) piše u u obliku:

$$I_E = \frac{\Delta h}{L} \quad (8.3)$$

8.2. Specifična energija presjeka i vrste tečenja

Specifična energija presjeka vodnog toka u hidrotehničkoj praksi se obično označava sa E_{sp} (m). Specifična energija presjeka vodnog toka predstavlja mehaničku energiju tečnosti koja protokne u nekoj jedinici vremena kroz određenu površinu poprečnog presjeka. Specifična energija može se svesti na jedinicu mase koja je određena horizontalnom referentnom ravni koja se postavlja na najnižu tačku poprečnog presjeka korita.

Važno je napomenuti da kod određivanja specifične energije vodnog toka ne uzima se u obzir atmosferski pritisak. Na osnovu već poznate Bernoullieve jednačine može se napisati izraz za specifičnu energiju presjeka vodnog toka:

$$E_{sp} = h + \frac{\alpha \cdot v^2}{2g} \quad (8.4)$$

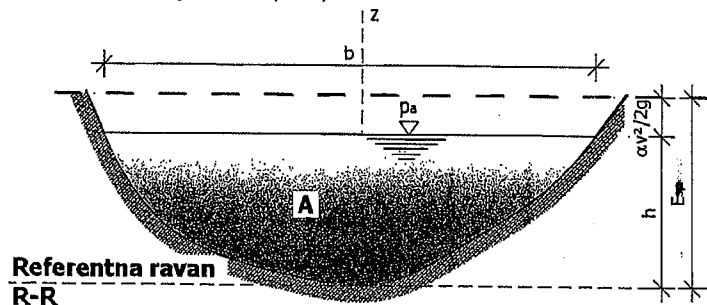
gdje je;

h – dubina tečnosti u poprečnom presjeku (m),

α – Coriollisov koeficijent,

v – srednja brzina tečnosti u poprečnom presjeku (m/s),

g – ubrzanje sile Zemljine teže (m/s^2).



Slika 8.3 Poprečni presjek otvorenog korita - prirodni vodotok

Poprečnim presjekom otvorenog korita, prikazanim na slici 8.3, isti protok Q može da protječe pri različitim brzinama tečenja i samim time i pri različitim dubinama vodnog toka, uvažavajući zakon o održanju mase. Pri promjeni brzine vodnog toka i dubine tečnosti ili bolje rečeno vode u poprečnom presjeku otvorenog korita, doći će do promjene potencijalnog dijela specifične energije presjeka koji zavisi od dubine vodnog toka, odnosno:

$$E_{sp,pot} = h \quad (8.5)$$

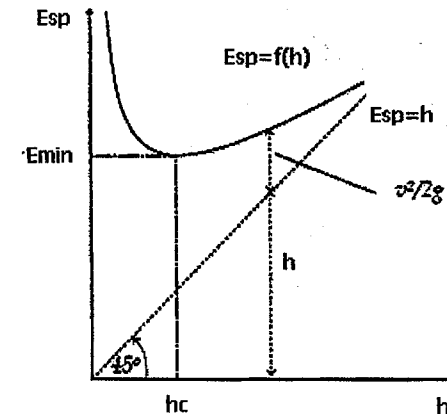
Kinetički dio specifične energije presjeka glasi:

$$E_{sp,kin} = \frac{\alpha \cdot v^2}{2g} \quad (8.6)$$

Na osnovu prethodnih izraza može se doći do slijedećih saznanja, i to:

Kada $h \rightarrow 0$ dobit će se da je $E_{sp,pot} \rightarrow 0$. U tom slučaju dolazi do velikog povećanja brzine toka što čini da $E_{sp,kin} \rightarrow \infty$. Takođe, ukoliko dubina vodnog toka $h \rightarrow \infty$ onda potencijalni dio specifične energije presjeka $E_{sp,pot} \rightarrow \infty$.

Coriollisov koeficijent kod otvorenih korita ima vrijednost $1,0 < \alpha < 1,1$. Pošto Coriollisov koeficijent ima vrijednost oko 1,0 često se ne uvodi u proračun. Pri nepromjenjivom protoku u otvorenom koritu računamo specifičnu energiju presjeka za različite dubine vodnog toka. Na osnovu rezultata ispitivanja odnosno proračuna, nacrt se kriva specifične energije presjeka čija dva kraka ili grane idu u beskonačnost, kao što je prikazano na slici 8.4.



Slika 8.4 Izgled krive specifične energije presjeka

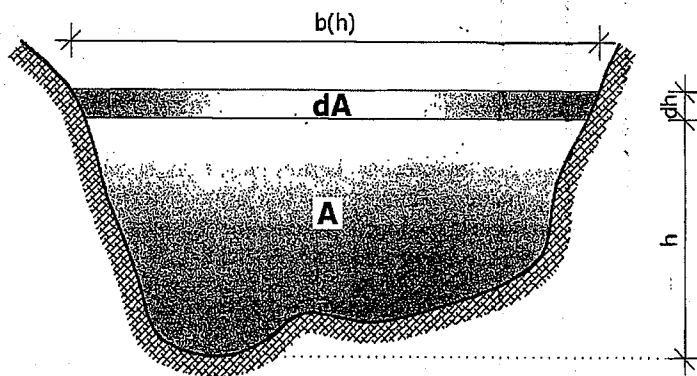
U otvorenim koritima dubina vodnog toka za koju specifična energija presjeka ima najmanju vrijednost naziva se kritična dubina (h_c). Kod kritične dubine nastaje tzv. kritični tok u otvorenom koritu. Ukoliko je dubina u otvorenom koritu manja od kritične dubine, onda će brzina toka biti velika i prema ranije navedenom preovladavati će kinetička energija tečnosti ili, pak, fluida u opštem smislu, a tok se naziva siloviti ili burni tok (silovito ili burno tečenje). Međutim, ukoliko je dubina vodnog toka veća od kritične dubine, onda će brzina tečenja

biti mala i preovladavati će potencijalni dio specifične energije presjeka, a takvo tečenje nazivamo mirno tečenje ili miran tok.

Promatramo sliku 8.5 koja pokazuje zavisnost specifične energije presjeka od dubine toka. Ukoliko se dubina toka (h) poveća za neku diferencijalnu malu vrijednost (dh) onda će se i površina poprečnog presjeka toka povećati za vrijednost dA , gdje je:

$$dA = b(h)dh \quad (8.7)$$

U izrazu 8.7 $b(h)$ predstavlja širinu toka gdje je dubina toka h .



Slika 8.5 Zavisnost specifične energije presjeka od dubine toka

Promjena specifične energije presjeka povećanjem dubine toka za diferencijalnu malu vrijednost dh predstavlja se slijedećim izrazom:

$$\frac{dE_{sp}}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{dA}{A^3 dh} \quad (8.8)$$

Na osnovu izraza 8.7 može se napisati slijedeće:

$$\frac{dA}{dh} = b(h) \quad (8.9)$$

Prema dva prethodna izraza dobija se:

$$\frac{dE_{sp}}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g \cdot A^3} \cdot b = 1 - F_r \quad (8.10)$$

Veličina označena sa F_r je bezdimenzionalna veličina i naziva se tzv. **parametar kinetičnosti vodnog toka** ili **Froudeov broj**.

Za slučaj kada je dubina vode u kanalu jednaka kritičnoj dubini ($h=h_c$) imamo da je Froudeov broj:

$$Fr = \frac{\alpha Q^2 \cdot b_c}{g A_c^3} = 1 \quad (8.11)$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b_c} \quad (8.12)$$

gdje je;

b_c – širina vodnog lica kod kojeg je $h=h_c$,

A_c – površina poprečnog presjeka kod koje je $h=h_c$.

Na osnovu izraza 8.11 i 8.12 može se vidjeti da se kritična dubina vode u otvorenom koritu nepravougaonog oblika ne može direktno izračunati već na osnovu iteracija. Za otvoreno korito pravougaonog poprečnog presjeka može se direktno izračunati veličina kritične dubine (h_c) na osnovu slijedećih jednakosti:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{b_c} = \frac{A_c^3}{b} = b^2 \cdot h_c^3 \quad (8.13)$$

Odavde se može odrediti kritična dubina u pravougaonom otvorenom koritu:

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{b^2 g}} \quad (8.14)$$

Kod tečenja u otvorenim koritima mogu postojati slijedeći tipovi tečenja, i to:

- Mirno tečenje (miran tok)** pri kojem je dubina vode u otvorenom koritu veća od kritične dubine ($h > h_c$) što znači da imamo povećanje specifične energije presjeka vodnog toka usljed povećanja potencijalnog dijela specifične energije presjeka ($E_{sp,pot}$) uz istovremeno smanjenje kinetičkog dijela specifične energije presjeka ($E_{sp,kin}$). U ovom slučaju Froudeov broj je manji od 1 ($F_r < 1$).
- Burno tečenje (buran tok)** pri kojem je dubina vode u otvorenom koritu manja od kritične dubine ($h < h_c$) što znači da imamo povećanje specifične energije presjeka usljed povećanja kinetičkog dijela specifične energije presjeka ($E_{sp,kin}$) uz istovremeno smanjenje potencijalnog dijela specifične energije presjeka ($E_{sp,pot}$). Kod burnog tečenja Froudeov broj je veći od 1 ($F_r > 1$).
- Kritično tečenje (kritičan tok)** se ostvaruje u otvorenim koritima kada je dubina vode jednaka kritičnoj dubini ($h = h_c$). U slučaju kritičnog tečenja Froudeov broj je jednak 1 ($F_r = 1$).

8.3. Jednoliko ustaljeno tečenje

Jednoliko tečenje predstavlja najjednostavniji oblik tečenje u otvorenim kanalima, jer su kod njega presjek toka, nagib dna i koeficijent trenja jednaki, odnosno hidrauličke karakteristike tečenja jednake su na cijeloj dužini vodnog toka. Zbog toka, kod jednolikog tečenja srednja brzina kao i protok su nepromjenjivi (konstantni), a linija energije postaje paralelna sa slobodnom površinom tečnosti u otvorenom kanalu i paralelna sa dnom kanala. Drugim riječima, svi prethodno navedeni padovi između dva presjeka (presjek 1 i presjek 2) kod otvorenog kanala međusobno su jednaki ($I_d = I_{II} = I_E$).

$$I_d = I_{II} = I_E \quad (8.15)$$

$$v_1 = v_2 = v \quad (8.16)$$

$$A_1 = A_2 = A \quad (8.17)$$

Na osnovu izraza 8.16 i 8.17 zaključuje se da je protok tečnosti otvorenim kanalom (koritom) sa jednolikim padom nepromjenjiv, odnosno:

$$Q = \text{const.} \quad (8.18)$$

Dakle, na osnovu prethodno rečenog može se konstatovati da će jednoliko tečenje u otvorenim kanalima nastati kada imamo nepromjenjive površine poprečnog presjeka ($A = \text{const}$), nepromjenjiv protok ($Q = \text{const}$), nepromjenjiv pad, istu hrapavost na okvašenoj površini toka otvorenog kanala i kada nema lokalnih otpora. Naime, jednoliko tečenje je moguće postići u vještački izgrađenim otvorenim kanalima kao što su kanali od montažnih betonskih elemenata pravougaonog, polukružnog ili paraboličnog poprečnog presjeka.

Pošto je jedan od uslova nastanka jednolikog tečenja u otvorenim kanalima stalnost površine poprečnog presjeka, onda kanale kod kojih je poprečni presjek duž vodnog toka nepromjenjiv ili stalan nazivamo **prizmatičnim kanalima**.

Pošto je već navedeno da kod jednolikog tečenja u otvorenim koritima mora postojati stalnost protoka i površine poprečnog presjeka, to znači da i srednja brzina vodnog toka mora biti nepromjenjiva (stalna) kao što je dato izrazom 8.16. To znači da jednoliko tečenje u otvorenim koritima može biti samo stacionarno (ustaljeno) tečenje i može nastati samo u prizmatičnim koritima. Kod takvog tečenja postoji isti podužni pad otvorenog korita ili bolje rečeno vještačkog kanala (I_d), postoji isti podužni pad vodnog lica (I_{II}), postoji stalna dubina vodnog toka (h) kao i nepromjenjiv pad linije energije (I_E).

Pri jednolikom tečenju u otvorenim koritima postoji dubina za određeni pad dna korita i protok, a tu dubinu nazivamo **normalnom dubinom** (h_N).

Kod određenih padova otvorenog korita ostvarit će se uslov da je normalna dubina vode jednaka kritičnoj dubini vode u koritu (kanalu), pa kod tog slučaja u otvorenom koritu imamo tzv. kritičan pad (I_c). Ukoliko je podužni pad dna otvorenog korita veći od kritičnog pada dna korita ($I > I_c$) onda je normalna dubina vode u koritu manja od kritične dubine ($h_N < h_c$) i imamo **burno tečenje**. U suprotnom slučaju, kada je pad dna korita manji od kritičnog pada dna korita ($I < I_c$) tada će normalna dubina vode u koritu biti veća od kritične dubine u koritu ($h_N > h_c$) i imamo **mirno tečenje** u otvorenom koritu ili kanalu.

I kod otvorenih korita odnosno kanala možemo koristeći Bernoullievu jednačinu opisati jednoliko tečenje na gotovo potpuno isti način kao što je bilo kod tečenja u cijevima. Razlika je u tome što kod jednolikog tečenja u otvorenim koritima nema lokalnih gubitaka već imamo samo gubitke na trenje prilikom tečenja, odnosno:

$$\Delta H_{lin} = \Delta H_{trenje} = I_E \cdot \Delta L = c_f \frac{\Delta L}{R} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (8.19)$$

$$I_E = \frac{\Delta H_{trenje}}{\Delta L} = \frac{c_f}{2g} \cdot \frac{v^2}{R} \quad (8.20)$$

Na osnovu izraza 8.20 može se odrediti brzina tečenja u otvorenom koritu za slučaj jednolikog tečenja, odnosno:

$$c_f \cdot v^2 = 2gRI_E \Rightarrow v^2 = \frac{2gRI_E}{c_f} \quad (8.21)$$

$$v = \sqrt{\frac{2gRI_E}{c_f}} \quad (8.22)$$

$$\sqrt{\frac{2g}{c_f}} = C \quad (8.23)$$

$$v = C \sqrt{RI_E} \quad (8.24)$$

Izraz 8.24 predstavlja tzv. Chezyevu formulu za brzinu u otvorenom koritu u slučaju jednolikog tečenja. Broj C (izraz 8.23) predstavlja tzv. Chezyev broj i to je složena veličina koja zavisi od hrapavosti površine otvorenog korita i od Reynoldsovog broja. Pošto broj C nije konstantna veličina razni istraživači su dali njegove aproksimacije pomoću nekih uglavnom jednostavnih funkcija. Neki istraživači su na osnovu iskustava dali empirijske izraze za Chezyev broj C tako da ti izrazi se i danas koriste u mehanici fluida kod jednolikog tečenja u

otvorenim koritima. Izraz koji je predložio Manning (1890) se i danas koristi u slijedećem obliku:

$$C = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}} \quad (8.25)$$

gdje je;

n – Manningov koeficijent hrapavosti ($m^{-1/3} s$),

R – hidraulički radijus (m).

Umjesto Manningovog koeficijenta hrapavosti može se koristiti njegova recipročna vrijednost koja se naziva Stricklerovim koeficijentom brzine (k_s). Na osnovu toga, Chezyev broj C dobija slijedeći oblik:

$$C = k_s \cdot R^{\frac{1}{6}} \quad (8.26)$$

Kada izraz 8.25 uvrstimo u izraz (8.24) dobit ćemo:

$$v = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{RI_E} \quad (8.27)$$

Sređivanjem ovog izraza dobit ćemo brzinu kod jednolikog tečenja u otvorenim koritima (kanalima):

$$v = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} I_E^{\frac{1}{2}} \quad (8.28)$$

Pošto je na osnovu jednačine kontinuiteta protok jednak:

$$Q = A \cdot v \Rightarrow Q = \frac{1}{n} A \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I_E^{\frac{1}{2}} \quad (8.29)$$

Vrijednosti Manningovog koeficijenta hrapavosti zavise od obloge otvorenog korita ili kanala. U narednoj tabeli (tabela 11) date su vrijednosti Manningovog koeficijenta hrapavosti za različite obloge odnosno završno izvedene površine otvorenih korita ili kanala.

Tabela 11. Vrijednosti Manningovog koeficijenta hrapavosti (n)

Završna obrada kanala	n ($m^{-1/3} s$)	Završna obrada kanala	n ($m^{-1/3} s$)
Glazirane površine ; veoma glatke površine	0,009	Kanali prekriveni debelim slojem mulja; kanali u zbijenom sitnom šljunku pokriveni tankim slojem zemlje	0,018
Veoma dobro zaglađen cementni malter ; hoblane sastavljene daske	0,010	Kanalj usječeni u kamen	0,020
Dobro zaglađen cementni malter ; nove i dobro sastavljene željezne i ljevano-željezne cijevi	0,011	Kanali u zbijenoj glini ; kanali u šljunku i zemlji pokriveni isprekidano tankim slojem mulja	0,022
Kvalitetan beton ; čiste kanalizacijske cijevi	0,012	Veliki zemljani kanali srednje održavani ; mali zemljani kanali dobro održavani ; rijeke u veoma dobrim uslovima	0,025
Dobra obloga od opeke ; kanalizacijske cijevi u normalnim uslovima korištenja	0,013	Veliki zemljani kanali u stanju nešto lošijem od normalnog ; mali kanali u srednjem stanju	0,0275
Betonski kanali u srednjim uslovima korištenja ; prljave vodovodne i kanalizacijske cijevi	0,014	Zemljani kanali u relativno slabom stanju ; rijeke u dobrim uslovima tečenja	0,030
Srednje dobra obloga od opeke ; dovoljno zaprljane kanalizacijske cijevi	0,015	Kanali u veoma lošim uslovima ; rijeke u relativno dobrom stanju ali sa nekom količinom kamena i šaši	0,035

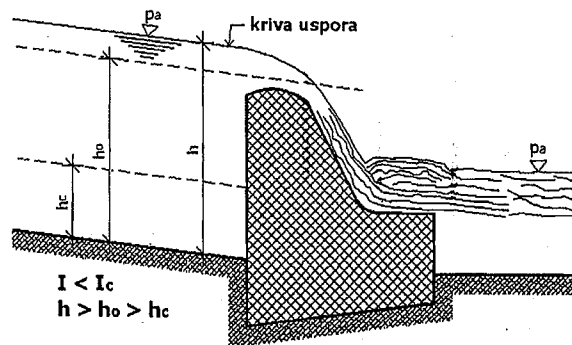
U hidrotehničkoj građevinskoj praksi veoma često je potrebno za otvoreni kanal određenog poprečnog presjeka izračunati normalnu dubinu toka. Naravno, moramo poznavati potreban ili zadati protok Q , pad dna kanala, Manningov koeficijent hrapavosti kanala i geometrijske karakteristike poprečnog presjeka tog kanala. Na osnovu izraza 8.28 i 8.29 nećemo moći direktno izračunati normalnu dubinu toka (h_N) već ćemo morati pristupiti iterativnom postupku. Naime, u prvoj iteraciji prvo pretpostavimo neku dubinu toka (h) te za nju odredimo proticajnu površinu poprečnog presjeka kanala (A), okvašeni obim (O)

i hidraulički radijus (R). Kada te sada poznate veličine uvrstimo u izraz 8.29 dobit ćemo vrijednost protoka Q . Međutim, pošto smo vrijednost za dubinu toka (h) proizvoljno odabrali, protok koji smo izračunali uglavnom neće biti jednak zadatom protoku Q . Tada, u drugoj iteraciji biramo neku drugu vrijednost za dubinu toka (h) te ponovo izračunamo vrijednosti za A , O i R te ponovo prema izrazu 8.29 izračunamo protok Q . U suštini, biramo određeni niz vrijednosti za dubinu toka (h) sve dok izračunati protok ne bude u granicama tražene tačnosti odnosno dovoljno blizu zadate vrijednosti protoka Q .

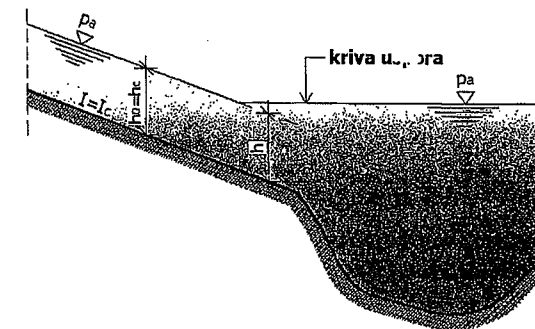
Postoji i drugi način određivanja normalne dubine toka (h_N), a to je preko tzv. **krive protoka** koja predstavlja grafoanalitički postupak određivanja protoka Q u funkciji dubine toka h . Kod krive protoka, odabrane vrijednosti za dubinu toka (h) nanosimo na vertikalnu osu (ordinatu) dok odgovarajuće im protoke Q nanosimo na horizontalnu osu (apsisu). Tačke koje dobijemo čine krivu koja prolazi kroz koordinatni početak Dekartovog koordinatnog sistema, jer za vrijednost dubine toka $h=0$ dobit ćemo da je protok $Q=0$. Dalje, na horizontalnoj osi odmjerimo zadati protok Q i zatim povučemo vertikalnu liniju do presjeka sa krivom protoka. Iz tog presjeka povučemo horizontalnu liniju do vertikalne ose (ordinata) i odredimo traženu dubinu toka.

8.4. Nejednoliko ustaljeno tečenje u prizmatičnim kanalima (koritima)

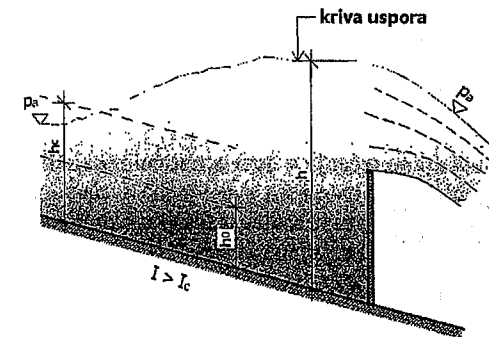
Nejednoliko tečenje u prizmatičnom kanalu ili koritu nastat će ukoliko se pojavi nagla promjena pada dna kanala ili kada se tečenju vode ili neke druge tečnosti ispriječi neka prepreka kao što je, na primjer, brana. U tom slučaju, duž korita ili kanala brzine će se smanjivati dok će se dubine toka povećavati ili obrnuto, u zavisnosti od načina poremećaja vodnog toka, te će nastupiti nejednoliko tečenje. Energetska linija će po dužini toka u otvorenom kanalu ili koritu opadati.



Slika 8.6 Nejednoliko tečenje vodotoka sa mirnim tečenjem u prizmatičnom kanalu



Slika 8.7 Nejednoliko tečenje vodotoka sa kritičnim tečenjem u prizmatičnom kanalu



Slika 8.8 Nejednoliko tečenje vodotoka sa bumim tečenjem u prizmatičnom kanalu

Na slikama 8.6 do 8.8 prikazani su mogući oblici slobodnog vodnog lica sa prikazom krive uspora. Kriva uspora se javlja kod postepenog porasta dubine vodnog toka duž vodotoka. Takođe, kod opadanja dubine vodnog toka nastat će tzv. kriva depresije. Nastajanje krive uspora ili krive depresije zavisi od normalne dubine u promatranom vodotoku (korito ili kanal), kao i od pada dna tog vodotoka. U funkciji odnosa normalnih i kritičnih dubina kao i od odnosa pada dna vodotoka prema kritičnom padu, pojavit će se jedna od navedenih krivih.

Prilikom nastajanja uspora (slike 8.6 do 8.8) jednoliko tečenje koje je do tada vládalo u prizmatičnom otvorenom kanalu preći će u usporeno nejednoliko tečenje. Kod nastajanja krive depresije, jednoliko tečenje u prizmatičnom otvorenom kanalu preći će u ubrzano nejednoliko tečenje.

Kod razmatranja nejednolikog ustaljenog tečenja u prizmatičnom kanalu važan je odnos dubine toka po dužini otvorenog kanala (dh/dx). Ovo tečenje se može napisati preko slijedećeg izraza:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1 - \frac{Q^2}{A^2 RC^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2 b}{gA^3}} = \frac{1 - I_E}{1 - F_r} \quad (8.30)$$

Za slučaj da je $\frac{dh}{dx} = 0$ izraz 8.30 opisat će jednoliko tečenje u otvorenom prizmatičnom kanalu. Na osnovu izraza 8.30, mogu se dati izrazi za dubinu h i za dužinu otvorenog toka kanala, odnosno:

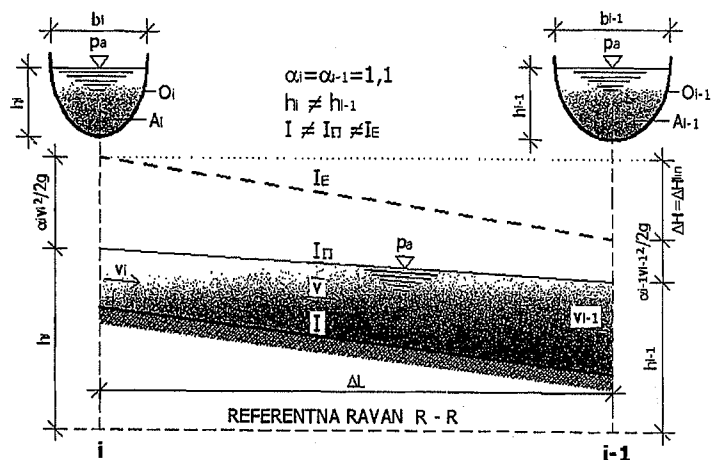
$$dh = \frac{(1 - I_E) dx}{1 - F_r} \quad (8.31)$$

$$dx = \frac{(1 - F_r) dh}{1 - I_E} \quad (8.32)$$

8.5. Nejednoliko ustaljeno tečenje u neprizmatičnim kanalima (koritima)

Neprizmatični kanali su otvoreni kanali (korita) kod kojih se duž toka mijenja poprečni presjek. Nejednoliko ustaljeno (stacionarno) tečenje se može odvijati u neprizmatičnim kanalima.

Postepeno promjenjivo tečenje se odvija u kanalima čiji oblik se postepeno mijenja po dužini toka.



Slika 8.9 Nejednoliko ustaljeno tečenje u neprizmatičnom kanalu

Ako sa slike 8.9 promatramo uzvodni presjek tečenja sa dubinom h_i , onda možemo postaviti Bernoullievu jednačinu u slijedećem obliku:

$$h_i + \frac{\alpha_i v_i^2}{2g} = h_{i-1} + \frac{\alpha_{i-1} v_{i-1}^2}{2g} + \Delta H_{lin} \quad (8.33)$$

Sa slike 8.9 i kroz izraz 8.33 data su dva presjeka duž otvorenog kanala i to presjek i i presjek $i-1$. U prethodnom izrazu imamo gubitke na trenje odnosno samo linijske gubitke koji se javljaju prilikom tečenja u otvorenim kanalima, dok nema lokalnih gubitaka kao što je slučaj kod cijevnih sistema. Takođe, oznaka h u izrazu predstavlja nivo vodnog lica u odnosu na usvojenu referentnu ravan.

Prema izrazu 8.28 koji se odnosi na srednju brzinu tečenja uzimajući u obzir i Manningov koeficijent hrapavosti, možemo izračunati pad energetske linije (I_E):

$$v = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \Rightarrow I^{\frac{1}{2}} = \frac{v \cdot n}{R^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow I = \frac{v^2 \cdot n^2}{R^{\frac{4}{3}}} \quad (8.34)$$

Prethodni izraz omogućava određivanje prosječnog pada linije energije između dva promatrana presjeka, pa ukoliko ga uvrstimo u izraz 8.19, može se dobiti izraz za određivanje gubitaka energije pri tečenju između dva presjeka, prikazana na slici 8.9.

$$\Delta H_{lin} = \frac{v^2 \cdot n^2 \cdot \Delta L}{R^{\frac{4}{3}}} \quad (8.35)$$

Međutim, pošto se radi o prosječnom padu linije energije, onda imamo i prosječnu brzinu tečenja (\bar{v}) kao i prosječan hidraulički radijus (\bar{R}). To znači da prvo moramo odrediti srednje vrijednosti brzine tečenja između dva promatrana presjeka i srednju vrijednost hidrauličkog radijusa, da bi mogli pristupiti određivanju prosječne vrijednosti gubitaka na trenje (linijski gubici) duž vodnog toka. Na jednostavan način odredit će se srednja brzina tečenja između dva presjeka, prikazana na slici 8.9:

$$\bar{v} = \frac{v_i + v_{i-1}}{2} \quad (8.36)$$

Srednja vrijednost hidrauličkog radijusa na promatranoj dionici između presjeka i i $i-1$, može se napisati kao:

$$\bar{R} = \frac{A_i + A_{i-1}}{O_i + O_{i-1}} \quad (8.37)$$

Kao što se može vidjeti prema prethodnim izrazima, problem kod nejednolikog ustaljenog tečenja u neprizmatičnim kanalima može se rješavati metodom iteracija i to počev od nizvodnog presjeka ($i-1$) gdje imamo poznat nivo vodnog lica (h_{i-1}) kao i poznatu veličinu protoka (Q). Zatim, pretpostavi se dubina na uzvodnom presjeku (h_i) i računaju se potrebne veličine. Kada tokom iterativnog postupka proračunom dobijemo da nivo uzvodnog lica ili dubina uzvodnog lica (h_i) bude jednaka pretpostavljenoj dubini u zahtjevanim granicama tačnosti, onda taj nivo uzvodnog lica ili dubinu uzvodnog lica usvajamo kao konačan rezultat.

8.6. Neustaljeno tečenje

Neustaljeno ili nestacionarno tečenje u otvorenim koritima ili kanalima je takva vrsta tečenja kod koga se u nekom promatranom poprečnom presjeku mijenja brzina tečenja (v), protok (Q) i dubina vode ili nivo vodnog lica (h). Slučaj neustaljenog tečenja u otvorenim kanalima je od posebne važnosti za hidrotehničku praksu, jer brzina tečenja je funkcija od vremena i dužine toka, kao i dubina vode u kanalu.

Opisivanje neustaljenog tečenja je dosta složeno, jer kod ovakvog tečenja nastaju i tzv. translatorni valovi kod kojih djelići vode stalno napreduju sa oblikom vala vode. Neustaljeno tečenje kod otvorenih kanala ili korita može se podijeliti u dvije osnovne grupe, i to:

- postepeno promjenjivo tečenje,
- naglo promjenjivo tečenje.

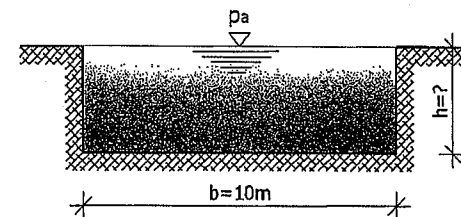
Objašnjenje navedene dvije osnovne grupe neustaljenog tečenja kod otvorenih kanala (korita) je slijedeće:

- Postepeno promjenjivo tečenje ima blagu zakrivljenost vodnog vala i blagu promjenu dubine vodnog toka u jedinici vremena. Najbolji primjeri ovakvog neustaljenog tečenja su poplavni valovi kao i valovi nastali postepenim otvaranjem ili zatvaranjem zatvarača ili ustava kao i otvaranjem ili zatvaranjem vrata na brodskih prevodnicama.
- Naglo promjenjivo tečenje ima veliku zakrivljenost i strmost oblika vodnog vala i ima naglu promjenu dubine vodnog toka u jedinici vremena. Dobri primjeri ovog neustaljenog tečenja su valovi koji nastaju usljed naglog rušenja brane ili odbrambenog nasipa kao i valovi hastali naglim otvaranjem ili zatvaranjem zatvarača ili ustava.

8.7. Riješeni zadaci iz otvorenih kanala

Zadatak 8.7.1.

U pravougaonom betonskom kanalu čije je dno širine $b=10,0$ m, Manningov koeficijent hrapavosti iznosi $n=0,0125$ m^{-1/3}s. Kanalom protiče $Q=25,0$ m³/s vode. Nagib dna kanala iznosi $I=0,2$ %. Potrebno je izračunati dubinu vode u kanalu i srednju brzinu tečenja vode.



RJEŠENJE

Površina poprečnog presjeka:

$$A = b \cdot h = 10h$$

Okvašeni obim:

$$O = b + 2h = 10 + 2h$$

Hidraulički radijus:

$$R = \frac{A}{O} = \frac{10h}{10 + 2h}$$

Protok vode kanalom:

$$Q = \frac{1}{n} A \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

$$25,0 = \frac{1}{0,0125} \cdot 10h \cdot \left(\frac{10h}{10 + 2h} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot 0,002^{\frac{1}{2}}$$

$$25,0 = 80 \cdot 10h \cdot \left(\frac{10h}{10 + 2h} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot 0,04472$$

$$25,0 = 3,5776 \cdot 10h \cdot \left(\frac{10h}{10 + 2h} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Određivanje nepoznate dubine vode u kanalu vrši se iterativnim postupkom:

Za $h=1,0\text{m}$	\Rightarrow	$25,0 \neq 31,68$
Za $h=1,1\text{m}$	\Rightarrow	$25,0 \neq 36,73$
Za $h=0,9\text{m}$	\Rightarrow	$25,0 \neq 26,88$
Za $h=0,8\text{m}$	\Rightarrow	$25,0 \neq 22,34$
Za $h=0,86\text{m}$	\Rightarrow	$25,0 \approx 25,03$

Usvojeno: $h=0,86\text{m}$.

$$R = \frac{10h}{10+2h} = \frac{10 \cdot 0,86}{10+2 \cdot 0,86} \Rightarrow R = 0,7337\text{m}$$

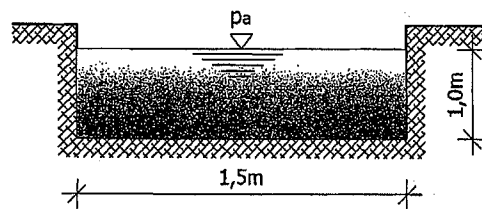
Brzina tečenja vode u kanalu:

$$v = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = \frac{1}{0,0125} 0,7337^{\frac{2}{3}} \cdot 0,002^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = 2,91\text{m/s}$$

Zadatak 8.7.2.

Pravougaonim kanalom širine 1,5 m i dubine vode 1,0 m protiče $Q=0,60\text{ m}^3/\text{s}$ vode. Pad kanala iznosi $I=0,03\%$. Potrebno je odrediti Manning-ov koeficijent hrapavosti obloge kanala i odrediti režim tečenja u kanalu.

Coriolis-ov koeficijent $\alpha=1,0$.



RJEŠENJE

Određivanje Manning-ovog koeficijenta hrapavosti obloge kanala:

$$Q = A \cdot v \Rightarrow Q = \frac{1}{n} A \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

$$A = b \cdot h \Rightarrow A = 1,5 \cdot 1,0 = 1,50\text{m}^2$$

$$O = b + 2h \Rightarrow O = 1,5 + 2 \cdot 1,0 = 3,50\text{m}$$

$$R = \frac{A}{O} \Rightarrow R = \frac{1,50}{3,50} = 0,428\text{m}$$

$$Q \cdot n = A \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \Rightarrow n = \frac{A \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}}{Q}$$

$$n = \frac{1,50 \cdot 0,428^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{0,03}{100}\right)^{\frac{1}{2}}}{0,60} \Rightarrow n = \frac{0,01475}{0,60} \Rightarrow n = 0,0246\text{m}^{-\frac{1}{3}}\text{s}$$

Određivanje režima tečenja:

Za Bazainovo pravougaono korito uvodimo oznaku $q = \frac{Q}{B}$

q – specifični protok po jedinici širine korita

$$\frac{\alpha \cdot Q^2}{g} = \frac{\alpha (q^2 \cdot B^2)}{g} = \frac{A_c^3}{B_c} = \frac{h_c^3 \cdot B_c^3}{B_c} \Rightarrow h_c^3 \cdot B_c^3 = \frac{\alpha \cdot q^2 \cdot B_c^2}{g}$$

$$\frac{\alpha \cdot q^2}{g} = h_c^3 \Rightarrow h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha \cdot q^2}{g}} \Rightarrow h_c = \sqrt[3]{\frac{1,0 \cdot 0,40^2}{g}}$$

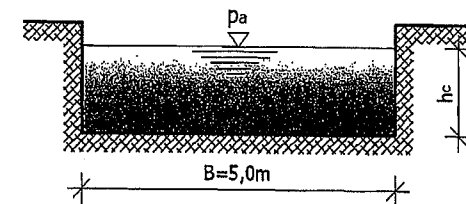
h_c – kritična dubina u kanalu

$$h_c = \sqrt[3]{0,016309} \Rightarrow h_c = 0,254\text{m} < h = 1,0\text{m} \Rightarrow \text{MIRNO TEČENJE}$$

$$q = \frac{Q}{B} = \frac{0,60}{1,5} \Rightarrow q = 0,40\text{m}^2/\text{s}$$

Zadatak 8.7.3.

Kanalom pravougaonog poprečnog presjeka protiče $Q=50\text{ m}^3/\text{s}$ vode. Potrebno je odrediti kritičnu dubinu vode (h_c) u kanalu i minimalnu specifičnu energiju ($E_{sp,min}$). Za poznati pad kanala $I_c=5$ promila u ovom slučaju, odrediti Manningov koeficijent hrapavosti obloge kanala. Coriolisov koeficijent $\alpha=1,1$.



RJEŠENJE

Određivanje kritične dubine u kanalu:

Kritična dubina u presjeku kanala \Rightarrow Froud-ov broj jednak 1 ($Fr=1$).

$$\frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot B}{gA^3} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot B}{g \cdot h_c^3 \cdot B^3} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha \cdot Q^2}{g \cdot h_c^3 \cdot B^2} = 1$$

$$\alpha \cdot Q^2 = g \cdot h_c^3 \cdot B^2$$

$$1,1 \cdot 50,0^2 = 9,81 \cdot h_c^3 \cdot 5,0^2 \Rightarrow 2750,0 = 245,25 \cdot h_c^3$$

$$h_c^3 = \frac{2750}{245,25} \Rightarrow h_c^3 = 11,22 \Rightarrow h_c = \sqrt[3]{11,22} \Rightarrow h_c = 2,24 \text{ m}$$

Određivanje minimalne specifične energije ($E_{sp,min}$):

$$E_{sp,min} = h_c + \frac{\alpha \cdot v_c^2}{2g} = h_c + \frac{\alpha \cdot Q^2}{A_c^2 \cdot 2g} = h_c + \frac{\alpha \cdot Q^2}{B^2 \cdot h_c^2 \cdot 2g}$$

$$E_{sp,min} = h_c + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot B^2 \cdot h_c^2} \Rightarrow E_{sp,min} = 2,24 + \frac{1,1 \cdot 50,0^2}{2g \cdot 5,0^2 \cdot 2,24^2}$$

$$E_{sp,min} = 2,24 + 1,12 \Rightarrow E_{sp,min} = 3,36 \text{ m}$$

Određivanje Manning-ovog koeficijenta hrapavosti (n):

$$v_c = \frac{Q}{A_c} = \frac{Q}{B \cdot h_c} \Rightarrow v_c = \frac{50,0}{5,0 \cdot 2,24} \Rightarrow v_c = 4,46 \text{ m/s}$$

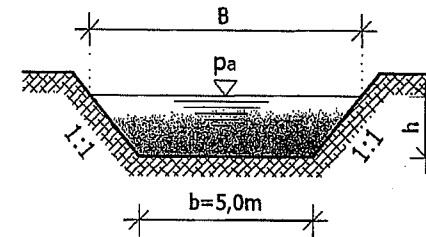
$$R_c = \frac{A_c}{O_c} = \frac{B \cdot h_c}{B + 2h_c} \Rightarrow R_c = \frac{5,0 \cdot 2,24}{5,0 + 2 \cdot 2,24} \Rightarrow R_c = 1,18 \text{ m}$$

$$v_c = \frac{1}{n} R_c^{\frac{2}{3}} \cdot I_c^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 4,46 = \frac{1}{n} 1,18^{\frac{2}{3}} \cdot 0,005^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 4,46 = \frac{1}{n} 1,116 \cdot 0,0707$$

$$4,46 \cdot n = 0,0789 \quad n = 0,0177 \text{ m}^{-\frac{1}{3}} \text{ s}$$

Zadatak 8.7.4.

Kanalom trapeznog poprečnog presjeka, prema slici, protiče $Q=20 \text{ m}^3/\text{s}$ vode. Potrebno je odrediti režim tečenja za dubinu vode u kanalu $h=1,7 \text{ m}$ te odrediti kritičnu dubinu u kanalu. Širina kanala $b=5,0 \text{ m}$, a Coriolisov koeficijent $\alpha=1,1$.



RJEŠENJE

$$B = b + h + h = b + 2h$$

Kritičan režim tečenja u kanalu: $Fr = 1 \Rightarrow Fr = \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3}$

$$\frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot (b + 2h)}{g \left(bh + \frac{1}{2} h^2 \cdot 2 \right)^3} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot (b + 2h)}{g (bh + h^2)^3} = 1$$

$$\frac{1,1 \cdot 20,0^2 \cdot (5,0 + 2h)}{g (5,0h + h^2)^3} = 1 \Rightarrow 1,1 \cdot 20,0^2 (5,0 + 2h) = g (5,0h + h^2)^3$$

$$440(5,0 + 2h) = 9,81(5,0h + h^2)^3 \Rightarrow 2200 + 880h = 9,81(5,0h + h^2)^3$$

Iterativni postupak određivanja kritične dubine u kanalu (h_c):

$$\text{Za } h_c = 1,0 \text{ m} \Rightarrow 3080 \neq 2118,96$$

$$\text{Za } h_c = 1,1 \text{ m} \Rightarrow 3168 \neq 2963,72$$

$$\text{Za } h_c = 1,12 \text{ m} \Rightarrow 3185,6 \neq 3159,20$$

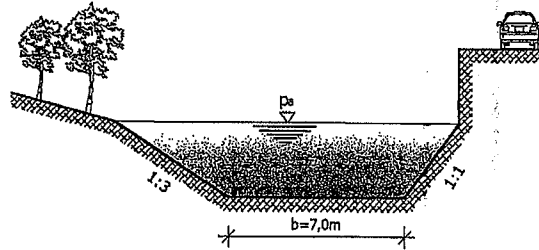
$$\text{Za } h_c = 1,125 \text{ m} \Rightarrow 3190 \approx 3209,55$$

Usvojeno: $h_c = 1,125 \text{ m} < h = 1,70 \text{ m} \Rightarrow$ MIRNO TEČENJE.

Zadatak 8.7.5.

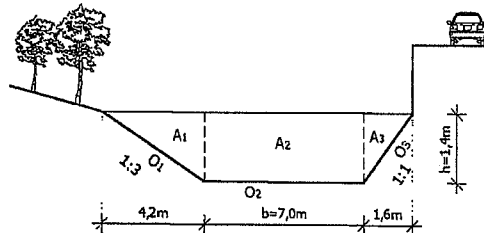
Na slici je prikazan poprečni presjek rijeke sa dubinom vode $h=1,40$ m. Nagib desne obale iznosi 1:1 i iznad se nalazi vertikalni potporni zid koji osigurava saobraćajnicu koja prolazi pored rijeke. Nagib lijeve obale iznosi 1:3 i iznad te obale je šuma. Potrebno je izračunati protok vode i prosječnu brzinu tečenja za dubinu vode $h=1,40$ m.

Zadato: $I=4,0$ promila ; $g=9,81$ m/s² ; $b=7,0$ m ; $h=1,40$ m ; $n=0,012$ m^{-1/3}s.



RJEŠENJE

$$Q = \frac{1}{n} A \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$



$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,40 \cdot 4,20 = 2,94 \text{ m}^2$$

$$O_1 = 4,42 \text{ m}$$

$$A_2 = 7,00 \cdot 1,40 = 9,80 \text{ m}^2$$

$$O_2 = 7,00 \text{ m}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 1,40 \cdot 1,40 = 0,98 \text{ m}^2$$

$$O_3 = 1,98 \text{ m}$$

$$\Sigma A_i = 13,72 \text{ m}^2$$

$$\Sigma O_i = 13,40 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{O} \Rightarrow R = \frac{13,72}{13,40} \Rightarrow R = 1,02 \text{ m}$$

$$I = 4,0 \text{ promila} = 0,004$$

$$Q = \frac{1}{0,012} \cdot 13,72 \cdot 1,02^{\frac{2}{3}} \cdot 0,004^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Q = 73,27 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v = \frac{Q}{A} \Rightarrow v = \frac{73,27}{13,72} \Rightarrow v = 5,34 \text{ m/s}$$

Zadatak 8.7.6.

Na slici je prikazan otvoreni kanal sa denivelacijom dna. Poznate su dubine vode u kanalu ispred i iza denivelacije. Preko denivelacije dna kanala pretpostaviti granični uslov da je $Fr=1$.

- Odrediti specifični protok q (m³/s m) i brzinu tečenja ispred denivelacije dna u kanalu.
- Utvrđiti režim tečenja ispred denivelacije dna kanala.



RJEŠENJE

- Određivanje brzine tečenja ispred denivelacije i specifičnog protoka:

$$h_2 = h_c = 1,5 \text{ m}$$

$$Fr = \frac{v_2}{\sqrt{g \cdot h_c}} \Rightarrow 1 = \frac{v_2}{\sqrt{g \cdot h_c}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{g \cdot h_c}$$

$$v_2 = \sqrt{9,81 \cdot 1,5} \Rightarrow v_2 = 3,84 \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = v_c$$

$$E_{sp,2} = d + h_c + \frac{v_c^2}{2g} \Rightarrow E_{sp,2} = 1,65 + 1,5 + \frac{3,84^2}{2 \cdot 9,81} \Rightarrow E_{sp,2} = 3,90 \text{ m}$$

$$E_{sp,2} = E_{sp,1} = 3,90 \text{ m}$$

$$E_{sp,1} = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow v_1 = \sqrt{(E_{sp,1} - h_1) \cdot 2g} \Rightarrow v_1 = \sqrt{(3,90 - 3,7) \cdot 2g}$$

$$v_1 = 1,98 \text{ m/s}$$

$$q = v_1 \cdot h_1 \Rightarrow q = 1,98 \cdot 1,50 \Rightarrow q = 2,97 \text{ m}^3/\text{s} \cdot \text{m}$$

b) **Određivanje režima tečenja ispred denivelacije dna kanala:**

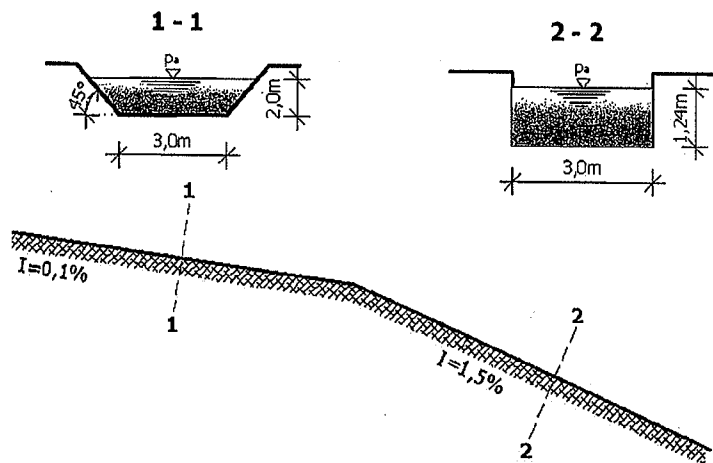
$$Fr = \frac{v_1}{\sqrt{g \cdot h_1}} \Rightarrow Fr = \frac{1,98}{\sqrt{9,81 \cdot 3,70}}$$

$$Fr = 0,328 < 1,0 \quad \text{MIRNO TEČENJE}$$

Zadatak 8.7.7.

Kanalom širine 3,0 m protiče voda, prema datoj slici. Na dijelu gdje je pad kanala $I=0,1\%$ izveden je trapezni poprečni presjek kanala, a na dijelu gdje je pad kanala $I=1,5\%$ izveden je pravougaoni poprečni presjek kanala. Manningov koeficijent hrapavosti iznosi $n=0,014 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ duž cijelog kanala.

- Koliki je protok vode u kanalu?
- Odrediti režim tečenja u trapeznom i u pravougaonom poprečnom presjeku kanala.



RJEŠENJE

a) **Protok vode u kanalu:**

Trapezni poprečni presjek kanala:

$$A = 3,0 \cdot 2,0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 2,0 \Rightarrow A = 10,0 \text{ m}^2$$

$$O = 3,0 + 2 \cdot 2,82 \Rightarrow O = 8,64 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{O} = \frac{10,0}{8,64} \Rightarrow R = 1,157 \text{ m}$$

$$Q = \frac{1}{n} A \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Q = \frac{1}{0,014} \cdot 10,0 \cdot 1,157^{\frac{2}{3}} \cdot (0,1 \cdot 0,01)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = 71,428 \cdot 10,0 \cdot 1,102 \cdot 0,0316 \Rightarrow Q = 24,8 \text{ m}^3/\text{s}$$

Pravougaoni poprečni presjek kanala:

$$A = 3,00 \cdot 1,24 \Rightarrow A = 3,72 \text{ m}^2$$

$$O = 3,00 + 2 \cdot 1,24 \Rightarrow O = 5,48 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{O} = \frac{3,72}{5,48} \Rightarrow R = 0,67 \text{ m}$$

$$Q = \frac{1}{n} A \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Q = \frac{1}{0,014} \cdot 3,72 \cdot 0,67^{\frac{2}{3}} \cdot (1,5 \cdot 0,01)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = 71,428 \cdot 3,72 \cdot 0,765 \cdot 0,122 \Rightarrow Q = 24,8 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) **Režim tečenja u kanalu:**

$$v = \frac{Q}{A}$$

$$v = \frac{24,8}{10,0} \Rightarrow v = 2,48 \text{ m/s} \quad \text{trapezni poprečni presjek kanala}$$

$$v = \frac{24,8}{3,72} \Rightarrow v = 6,67 \text{ m/s} \quad \text{pravougaoni poprečni presjek kanala}$$

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot h}}$$

Trapezni poprečni presjek kanala:

$$Fr = \frac{2,48}{\sqrt{9,81 \cdot 2,0}} = \frac{2,48}{4,43} \Rightarrow Fr = 0,56 < 1,0 \quad \text{MIRNO TEČENJE}$$

Pravougaoni poprečni presjek kanala:

$$Fr = \frac{6,67}{\sqrt{9,81 \cdot 1,24}} = \frac{6,67}{3,48} \Rightarrow Fr = 1,92 > 1,0 \quad \text{BURNO TEČENJE}$$

9. ISTJECANJE TEČNOSTI PREKO PRELIVA

9.1. Uvod

Prelivi su vrsta hidrotehničke građevine kod kojih voda teče usljed razlike pritiska koji nastaje zbog bočnog suženja proticajnog toka ili zbog pregrađivanja proticajnog toka, te u tim slučajevima voda teče preko preliva.

U današnjoj hidrotehničkoj praksi postoji odgovarajuća podjela preliva, i to prema:

1) Položaju praga preliva u osnovi, u odnosu na smjer tečenja:

- a) okomiti preliv,
- b) bočni preliv,
- c) kosí preliv,
- d) krivolinijski preliv.

2) Profilu preliva:

- a) oštroični (oštrobridni) preliv,
- b) preliv praktičnog profila,
- c) preliv sa širokim pragom.

3) Prilazu vodotoka prema prelivu gledajući u osnovi:

- a) preliv bez bočnog suženja,
- b) preliv sa bočnim suženjem.

4) Načinu spajanja mlaza prelivne vode sa donjom vodom:

- a) nepotopljeni preliv (nivo donje vode ne utiče na prelivni protok),
- b) potopljeni preliv (nivo donje vode utiče na prelivni protok).

5) Obliku poprečnog presjeka po vrhu preliva:

- a) pravougaoni preliv,
- b) trapezni preliv,
- c) trougaoni preliv,
- d) kružni preliv,
- e) parabolični preliv.

Veoma je važno naglasiti da kod svih vrsta preliva hidraulički proračun polazi od opšte jednačine preliva koja direktno proizilazi iz Bernoullieve jednačine. Protok (Q) vode ili neke druge tečnosti preko preliva može se iskazati preko slijedećeg izraza:

• Nepotopljeno prelivanje:

$$Q = m_o b_p \sqrt{2g} H_o^{\frac{3}{2}} \quad \text{odnosno} \quad Q = m b_p \sqrt{2g} H_o^{\frac{3}{2}} \quad (9.1)$$

- Potopljeno prelivanje:

$$Q = \sigma_p m_o b_p \sqrt{2gH_o^3} \quad \text{odnosno} \quad Q = \sigma_p m b_p \sqrt{2gH_o^3} \quad (9.2)$$

gdje je;

b_p – dužina preliva (m),

H – prelivna geometrijska visina (m),

H_o – tzv. energijska visina (m),

m, m_o – koeficijenti protoka na prelivu (zavise od konstrukcije preliva),

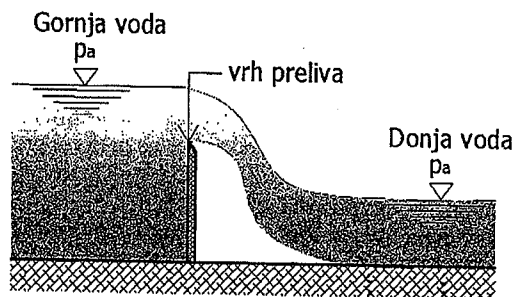
σ_p – koeficijent potopljenosti (zavisi od vrste preliva),

g – ubrzanje sile Zemljine teže (m/s^2).

Iz izraza 9.1 i 9.2 za određivanje vrijednosti protoka u slučaju nepotopljenog i potopljenog prelivanja vidi se da je važno poznavati vrijednosti za koeficijent protoka na prelivu (m, m_o) kao i koeficijent potopljenosti (σ_p).

9.2. Oštrobridni (oštrovični) preliv

Oštrobridni preliv spada u najjednostavnije vrste preliva i to može biti slučaj postojanja nekog zida upravno (okomito) na pravac tečenja vode u kanalu ili koritu. Vrh takvog zida nazivamo vrhom ili tzv. krunom preliva.



Slika 9.1 Oštrobridni preliv

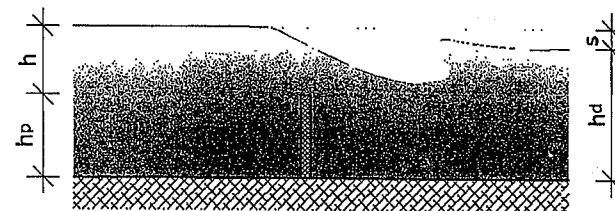
Na slici 9.1 vidi se da je vrh preliva gornji rub ili ivica zida. Ovakvim zidom odnosno prelivom u vodnom toku nastaje uzvodni nivo vode od zida (preliva) koji nazivamo **gornja voda**, a nastaje i nizvodni dio vode u kanalu koji nazivamo **donja voda**.

Kada nivo donje vode ne utiče na tok gornje vode kažemo da imamo **nepotopljeno prelivanje**, odnosno kada nivo donje vode značajno utiče na nivo gornje vode onda imamo **potopljeno prelivanje** i tada nivo donje vode je na gotovo istoj koti kao gornja voda ili je čak nivo donje vode viši od vrha ili krune preliva. Za utvrđivanje kriterija potopljenosti ili nepotopljenosti oštrobridnog preliva može se koristiti slijedeći izraz:

$$s < 0,7h_p \quad (9.3)$$

Ukoliko je uslov dat izrazom 9.3 ispunjen onda je preliv nepotopljen, dok u suprotnom slučaju radi se o potopljenom prelivanju.

Veličina s označava visinsku razliku između nivoa donje i nivoa gornje vode dok veličina h_p predstavlja visinu preliva sa uzvodne strane. Na slijedećoj slici prikazan je potopljeni oštrobridni preliv sa svojim karakterističnim parametrima.



Slika 9.2 Oštrobridni potopljeni preliv

Veoma jednostavno se može odrediti veličina protoka kod oštrobridnog preliva ukoliko se koristi izraz za protok kroz veliki otvor, gdje visina gornjeg ruba otvora (ivice) odgovara nivou vode, odnosno protok preko preliva, prema slici 9.2, dat je izrazom:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} (h)^{3/2} \quad (9.4)$$

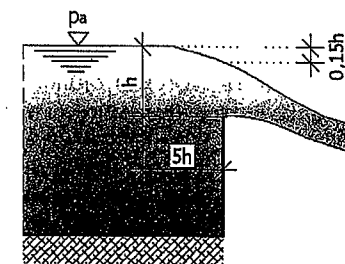
gdje je;

b – širina vrha (krune) preliva,

h – dubina vode ili druge tečnosti na prelivu,

μ – koeficijent kontrakcije mlaza.

Veoma je bitno napomenuti da zbog spuštanja nivoa vode na mjestu preliva kao hidrograđevinskog objekta, visinu vode iznad vrha preliva moramo mjeriti ispred preliva (uzvodno) na udaljenosti od 4 do 5 dubina od preliva, dok sniženje nivoa vode na vrhu preliva obično iznosi do 0,15 od visine prelivnog mlaza (slika 9.2).



Slika 9.3 Sniženje nivoa vode na mjestu vrha preliva

U izrazu 9.4 zanemareno je bočno suženje prelivnog mlaza, što je i opravdano pošto je širina otvorenog korita ili kanala obično mnogo veća od same dubine vodnog toka. Zbog toga to malo bočno suženje nema značajan uticaj na veličinu protoka Q . Međutim, suženje u vertikalnom smjeru nikako se ne smije zanemariti prilikom hidrauličkog proračuna. Suženje u vertikalnom smjeru u hidrotehničkoj praksi opisuje se koeficijentom suženja (kontrakcije) mlaza μ . Ovaj koeficijent vertikalnog suženja mlaza naziva se i Bazainov koeficijent suženja (kontrakcije) koji se odnosi samo na oštrobriđne prelive, te imamo:

$$m = \frac{2}{3} \mu \quad (9.5)$$

Na osnovu ovoga imamo izraz 9.1 za nepotopljeno prelivanje. Naime, Bazainov koeficijent suženja ili kontrakcije može se odrediti na osnovu empirijske formule:

$$m = m_0 \left[1 + 0,55 \left(\frac{h}{h + h_p} \right)^2 \right] \quad (9.6)$$

$$m_0 = 0,405 + \frac{0,003}{h} \quad (9.7)$$

Veličine h i h_p date su na slici 9.2 dok je o koeficijentima protoka m i m_0 ranije rečeno.

Izraz 9.2 određuje količina prelivnog potopljenog mlaza gdje bitnu ulogu ima koeficijent potopljenosti σ_p (Bazainov koeficijent potopljenosti):

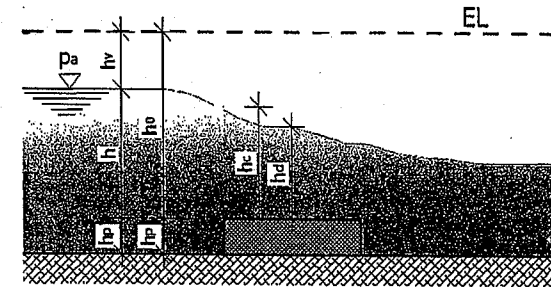
$$\sigma_p = 1,05 \left(1 + 0,2 \frac{h}{h_p} \right) \sqrt[3]{\frac{h - h_d}{h}} \quad (9.8)$$

9.3. Preliv sa širokim pragom

Kod preliava sa širokim pragom vrh preliava je znatne širine u odnosu na oštrobriđni preliv, a i visina preliava je manja od širine samog preliava. U slučaju kada je dubina vode na preliavu sa širokim pragom manja od kritične dubine onda imamo tzv. nepotopljeni preliv. Drugim riječima, nepotopljeni preliv sa širokim pragom postoji ukoliko je zadovoljen slijedeći uslov:

$$h_d < h_c \quad (9.9)$$

Na slici 9.4 prikazan je preliv sa širokim pragom sa svojim osnovnim karakteristikama.



Slika 9.4 Preliv sa širokim pragom

U današnjoj hidrotehničkoj praksi proračun nepotopljenog preliavanja kod preliava sa širokim pragom vrši se uglavnom na osnovu izraza Berezinskog koji predstavlja iskustvenu formulu odnosno izraz koji glasi:

$$Q = m \cdot b \cdot \sqrt{2g} h_0^{\frac{3}{2}} \quad (9.10)$$

Veličina m predstavlja koeficijent preliava koji se može izračunati na osnovu odnosa visine širokog praga sa uzvodne strane i dubine vode ispred preliava sa širokim pragom, odnosno:

$$m = 1,973 - 0,222 \frac{h_p}{h} \quad \text{za} \quad 0,6 < \frac{h_p}{h} < 2,5 \quad (9.11)$$

$$m = 1,706 \frac{1 + 1,30 \frac{h_p}{h}}{1 + 1,63 \frac{h_p}{h}} \quad \text{za} \quad 2,5 < \frac{h_p}{h} < 10 \quad (9.12)$$

9.4. Preliv praktičnog profila

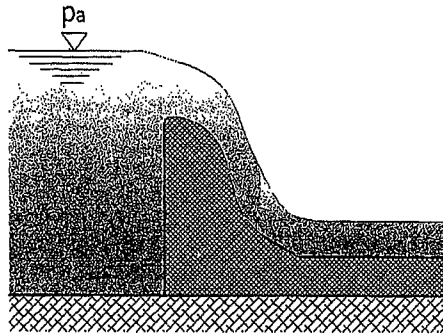
Preliv praktičnog profila spada u tzv. krivolinijske prelive koje možemo podijeliti na dvije osnovne grupe, i to:

- bezvakuumski prelive,
- vakuumski prelive.

Bezvakuumski preliv je takva vrsta preliava kod koga se profil nizvodne strane preliava podudara sa konturom slobodnog prelivnog mlaza i između prelivnog mlaza i konture preliava ne postoji prazan ili slobodan prostor.

Vakuumski preliv je vrsta preliava praktičnog profila kada između nizvodne površine konture preliava i prelivnog mlaza postoji slobodan prostor u kome nastaje podpritisak odnosno vakuum. Kod vakuumskih preliava nastaje

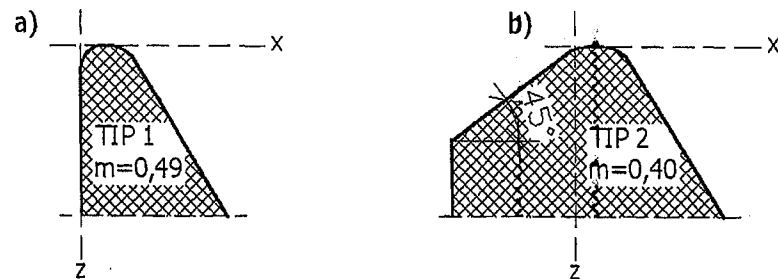
nestabilnost prelivnog mlaza i dolazi do pojave vibracija na hidrotehničkom objektu što u konačnici dovodi do razaranja površine nizvodne strane konstrukcije preliva praktičnog profila. Iz tog razloga, u hidrotehničkoj praksi se uglavnom projektuju i grade bezvakuumski prelivni.



Slika 9.5 Preliv praktičnog profila

Kod bezvakuumskih preliva praktičnog profila moguća su dva načina preliivanja ili istjecanja vode, i to nepotopljeno i potopljeno istjecanje.

Nepotopljeno preliivanje ili istjecanje kod bezvakuumskog preliiva praktičnog profila može se ostvariti samom konstrukcijom konture preliiva i ostvarivanjem potrebnih hidrauličkih osobina preliiva. Na osnovu eksperimenata, Creager i Officerov su u prvoj polovini XX vijeka došli do oblika konture vrha preliiva i nizvodne konture konstrukcije preliiva.



Slika 9.6 a) Creager-Officerov bezvakuumski preliv b) Creagerov bezvakuumski preliv

U slijedećim tabelama date su koordinate konture bezvakuumskog preliiva praktičnog profila za tip Creager-Officerovog preliiva i za tip Creagerovog preliiva, koje se odnose na jediničnu visinu preliiva.

Tabela 12. Vrijednosti koordinata konture preliiva praktičnog profila za Creager-Officerov preliv

Koordinata x	Koordinata z	Koordinata x	Koordinata z	Koordinata x	Koordinata z
0,0	0,126	0,6	0,060	1,7	0,873
0,1	0,036	0,8	0,147	2,0	1,235
0,2	0,007	1,0	0,256	2,5	1,960
0,3	0,000	1,2	0,393	3,0	2,824
0,4	0,007	1,4	0,565	3,5	3,818

Tabela 13. Vrijednosti koordinata konture preliiva praktičnog profila za Creagerov preliv

Koordinata x	Koordinata z	Koordinata x	Koordinata z	Koordinata x	Koordinata z
0,0	0,043	0,6	0,090	1,7	0,992
0,1	0,010	0,8	0,189	2,0	1,377
0,2	0,000	1,0	0,321	2,5	2,140
0,3	0,005	1,2	0,480	3,0	3,060
0,4	0,023	1,4	0,665	3,5	4,080

Date koordinate konture bezvakuumskog preliiva praktičnog profila odnose se za prelivnu visinu od 1,0m ($H=1,0m$) na vrhu preliiva. Na osnovu koordinata iz tabela 12 i 13 moguće je odrediti obris ili konturu bezvakuumskog preliiva praktičnog profila i za sve ostale prelivne visine (H_{pr}) tako što se jedinične koordinate iz tabela pomnože sa prelivnom visinom H_{pr} .

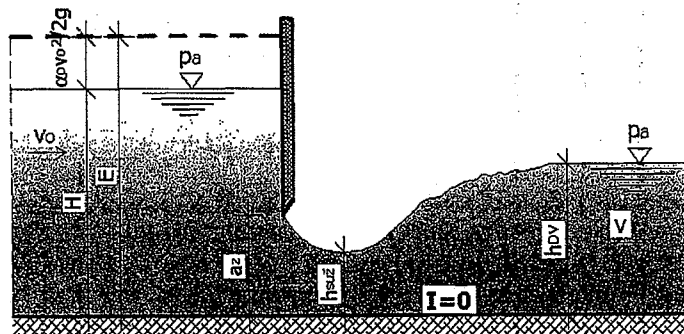
Potopljeno istjecanje ili preliivanje preko bezvakuumskih preliiva praktičnog profila nastaje kada se prelivni mlaz vode ne spaja sa ustaljenom dubinom donje vode (nizvodno od preliiva) pomoću tzv. odbaćenog hidrauličkog skoka. Preliv je potopljen i ne zavisi od odnosa visine praga sa uzvodne strane i dubine vode.

Navedeni hidraulički skok predstavlja promjenu oblika slobodne površine vodotoka u obliku skoka prilikom prelaza iz burnog u mirno tečenje.

10. ISTJECANJE TEČNOSTI ISPOD USTAVE

10.1. Nepotopljeno istjecanje ispod ustave

Istjecanje ispod zatvarača u otvorenim kanalima (koritima) može biti nepotopljeno i potopljeno istjecanje. Nepotopljeno istjecanje ispod ustave nastaje kada donja voda ne utiče na suženi presjek mlaza vode ispod ustave, pa ovakvo istjecanje nazivamo i slobodnim istjecanjem ispod ustava. Najjednostavnije objašnjenje istjecanja ispod ustava je kroz pravougaoni otvor kada imamo ravno dno korita.



Slika 10.1 Nepotopljeno istjecanje ispod ustave

Nepotopljeno istjecanje ispod ustave nastaje ukoliko dno otvorenog korita iza otvora (mjesto ustave) ima pad veći od kritičnog pada ($I > I_c$) ili ukoliko mlaz vode koji istječe ispod ustave prelazi u miran režim u suženom presjeku pomoću tzv. odbačenog vodnog skoka. Na osnovu slike 10.1 i prethodno navedenog može se napisati izraz za nepotopljeno istjecanje:

$$\frac{h_{DV}}{h_{suž}} \left(\frac{h_{DV}}{h_{suž}} + 1 \right) < 4\varphi^2 \left(\frac{E}{h_{suž}} - 1 \right) \quad (10.1)$$

gdje je:

h_{DV} – dubina donje vode u koritu (iza ustave),

$h_{suž}$ – dubina vode u suženom presjeku,

E – visina linije energije,

φ – koeficijent brzine ($\varphi=0,95$ do $0,97$ za ustavu bez praga, kao na slici 10.1).

Dubina vode u suženom presjeku ($h_{suž}$) može se odrediti ukoliko znamo površinu presjeka suženog mlaza ($A_{suž}$) i širinu otvora ispod ustave (b_z), odnosno:

$$h_{suž} = \frac{A_{suž}}{b_z} \quad (10.2)$$

Brzina u suženom presjeku ($v_{suž}$) kod nepotopljenog istjecanja ispod ustave može se odrediti primjenjujući Bernoullievu jednačinu:

$$v_{suž} = \varphi \sqrt{2g(E - h_{suž})} \quad (10.3)$$

Shodno tome, protok (Q) u suženom presjeku odredit će se preko izraza:

$$Q = v_{suž} \cdot A_{suž} = \varphi \sqrt{2g(E - h_{suž})} \cdot (h_{suž} \cdot b_z) \quad (10.4)$$

10.2. Potopljeno istjecanje ispod ustave

Potopljeno istjecanje ispod ustave u otvorenim koritima nastat će ukoliko je ispunjen slijedeći uslov koji se odnosi na dubine vodnog toka, odnosno:

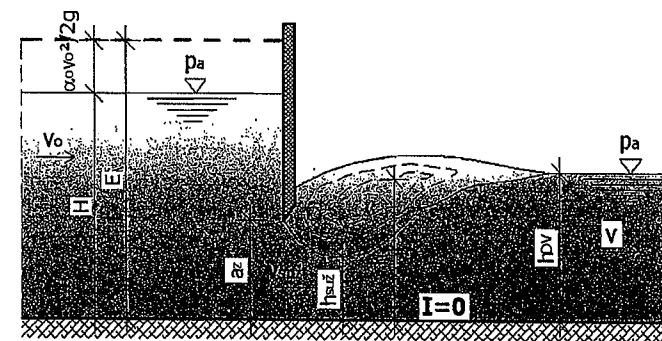
$$h_{suž} < h < h_{DV} \quad (10.5)$$

gdje je:

$h_{suž}$ – dubina vode u suženom presjeku,

h – dubina vode iza ustave u suženom presjeku,

h_{DV} – dubina donje vode u koritu (iza ustave).



Slika 10.2 Potopljeno istjecanje ispod ustave

Protok vode kroz otvor ispod ustave može se odrediti prema izrazu:

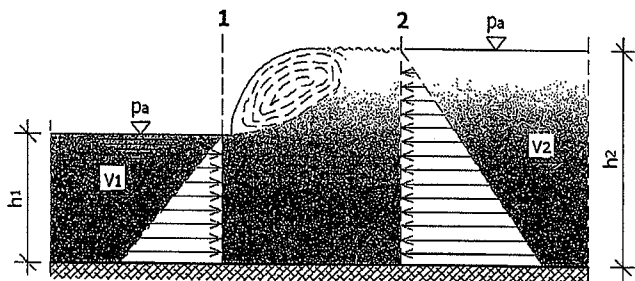
$$Q = \mu \cdot a_z \cdot b_z \sqrt{2g(E - h)} \quad (10.6)$$

U prethodnom izrazu μ predstavlja koeficijent istjecanja o kome je već ranije bilo riječi.

10.3. Hidraulički skok

Hidraulički skok se javlja prilikom istjecanja tečnosti ispod ustave, kod preliivanja preko brane i kod promjene pada dna kanala sa veličine $I > I_c$ na veličinu $I < I_c$. Hidraulički skok javlja se uvijek kada burno tečenje prelazi u mirno tečenje.

Hidraulički skok može se objasniti ako promatramo jedno otvoreno korito kojim se tečnost kreće velikom brzinom. Ako na nekom mjestu na dnu korita postoji neka prepreka ili neravnost dna, doći će do naglog dizanja slobodne površine tečnosti odnosno nivoa tečnosti koji će i nizvodno ostati na tom nivou (visini). Tečnost koja se kreće velikom brzinom u nekom otvorenom koritu pretvara kinetičku energiju u potencijalnu energiju kao i u toplotnu energiju sa pojavom određenih gubitaka tokom tečenja.



Slika 10.3 Hidraulički skok i pojava „valjka tečnosti“

Na slici 10.3 prikazana je veoma česta pojava tzv. valjka tečnosti koja se javlja pri hidrauličkom skoku. Valjak tečnosti nastaje na tzv. usponskoj površini između dva nivoa ili dvije dubine tečnosti i taj valjak uvlači vazduh u tečnost te ona iz tog razloga ima nemirnu površinu. Gubici koji se javljaju u ovom slučaju su dosta veliki i što je hidraulički skok veći tako imamo i veće gubitke energije. Takođe, hidraulički skok se može objasniti ukoliko promatramo otvoreno korito pravougaonog poprečnog presjeka, te za njega, prema slici 10.3, može se napisati slijedeći izraz:

$$F = m(v_2 - v_1) \quad (10.7)$$

Vanjske sile F predstavljaju pritisak susjednih čestica na presjecima 1 i 2 (slika 10.3), odnosno presjeci 1 i 2 su granice kontrolne zapremine hidrauličkog skoka, odnosno:

$$\frac{\rho g \cdot h_1^2}{2} - \frac{\rho g \cdot h_2^2}{2} = m(v_2 - v_1) \quad (10.8)$$

Veličina m predstavlja maseni protok, koji za jediničnu širinu otvorenog pravougaonog korita iznosi:

$$m = \rho \cdot h_1 \cdot v_1 \quad (10.9)$$

Kada se primjeni jednačina kontinuiteta, dobija se slijedeći izraz:

$$h_1 \cdot v_1 = h_2 \cdot v_2 \quad (10.10)$$

Na osnovu prethodnih izraza može se napisati:

$$\frac{\rho g}{2} (h_1^2 - h_2^2) = \rho \cdot h_1 \cdot v_1 \cdot \left(v_1 \frac{h_1}{h_2} - v_1 \right) \quad (10.11)$$

Nakon matematskog „sređivanja“ prethodnog izraza dobija se:

$$\frac{h_2}{h_1} + \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 - \frac{2v_1^2}{gh_1} = 0 \quad (10.12)$$

Rješenje ove kvadratne jednačine može se napisati u slijedećem obliku (predznak „minus“ je izostavljen pošto nema nikakvog fizičkog značenja):

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{2 \frac{v_1^2}{gh_1} + \frac{1}{4}} \quad (10.13)$$

U izrazu 10.13 se vidi da veličina $\frac{v_1}{gh_1}$ predstavlja Froudeov broj za tečenje u otvorenom koritu koje se odvija ispred hidrauličkog skoka (slika 10.3). Na osnovu ovoga prethodni izraz se može napisati u slijedećem obliku:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{2Fr_1 + \frac{1}{4}} \quad (10.14)$$

Prema izrazu 10.14 vidi se da do pojave hidrauličkog skoka dolazi samo ako je $Fr_1 > 1$, jer je tada i $h_2 > h_1$. Za veličinu Froudeovog broja od jedan ($Fr=1$) nastaje tečenje kod koga brzinu tečenja nazivamo kritičnom brzinom koja se piše u obliku:

$$v_c = \sqrt{gh} \quad (10.15)$$

Znači, do pojave hidrauličkog skoka dolazi kod tečenja u otvorenom koritu kod koga je brzina tečenja veća od kritične brzine, a ta brzina odgovara brzini površinskih talasa. Ukoliko se tečnost u otvorenom koritu kreće brzinom većom od kritične brzine ($v > v_c$) onda imamo burno tečenje, a ako se tečnost kreće brzinom manjom od kritične ($v < v_c$) onda imamo mirno tečenje. Burno tečenje je kretanje, na primjer, brzih planinskih vodotoka gdje nakon hidrauličkog skoka burno tečenje prelazi u mirno tečenje, čemu odgovara tečenje rijeka. Znači, kod uslova da je $v < v_c$ imat ćemo da je $Fr < 1$, što odgovara mirnom tečenju (nivo tečnosti se ne može povećati nego ga neka prepreka u koritu može smanjiti) i obrnuto.

Već je rečeno da pri hidrauličkom skoku nastaje određeni gubitak energije koji se može odrediti na osnovu Bernoullieve jednačine, promatrajući sliku 10.3.

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H \quad (10.16)$$

Gubitak koji nastaje pri pojavi hidrauličkog skoka može se napisati u slijedećem izrazu:

$$\Delta H = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} \quad (10.17)$$

Visina hidrauličkog skoka (h_{HS}) predstavlja razliku dubina h_2 i h_1 , odnosno:

$$h_{HS} = h_2 - h_1 \quad (10.18)$$

Dužina hidrauličkog skoka (L_{HS}) predstavlja horizontalno rastojanje od čela hidrauličkog skoka do tačke na vodnoj površini neposredno nizvodno od vrtloga ili „valjka“. Dužina hidrauličkog skoka predstavlja veoma bitan kriterij za projektovanje. U konkretnim slučajevima u praksi primjenjujemo empirijske izraze i formule dobijene na osnovu eksperimenata, da bismo odredili dužinu hidrauličkog skoka. Postoji više formula za određivanje dužine hidrauličkog potpunog skoka u pravougaonom horizontalnom otvorenom koritu, kao što je formula Smetane:

$$L_{HS} = 6(h_2 - h_1) \quad (10.19)$$

Osim prethodne formule, u praksi se primjenjuje i formula Silvestera za određivanje dužine hidrauličkog skoka, odnosno:

$$L_{HS} = 9,75h_1(\sqrt{Fr} - 1)^{1,01} \quad (10.20)$$

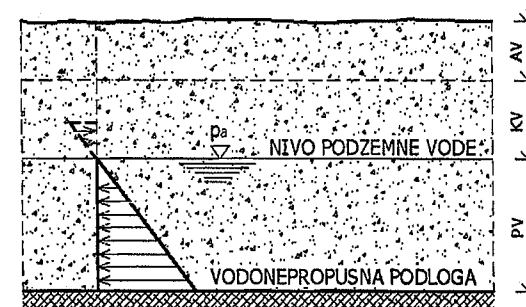
11. KRETANJE PODZEMNIH VODA

11.1. Uvod

Podzemne vode po svojim fizičkim i hemijskim karakteristikama spadaju u najbolja izvorišta za vodosnabdjevanje stanovništva pitkom vodom. Kretanje podzemnih voda odvija se u poroznim sredinama u tlu (šljunak, pijesak, pješćano-glinoviti materijali) i stijenama (krečnjak, dolomit, pješćar itd).

Kretanje podzemne vode predstavlja kretanje vode kroz zasićeno porozno tlo ili stijenu. Kretanje vode u takvoj zasićenoj poroznoj sredini naziva filtracija ili procjeđivanje.

Voda koja se nalazi u tlu može biti adhezijska, kapilarna i podzemna voda. Adhezijska voda je voda koja se nalazi u gornjem sloju tla (pri površini terena), dok kapilarna voda ispunjava najuže pore tla zbog postojanja površinskog napona. Kapilarna voda se javlja usljed povećanja vlažnosti tla. Podzemna voda u zasićenoj poroznoj sredini tla se kreće usljed djelovanja sile gravitacije. U hidrotehničkoj praksi posebno je zanimljiva tzv. arteška podzemna voda koja se nalazi u vodonosnom tlu koji je smješten između vodonepropusne podine i vodonepropusne krovine, odnosno vodonosni sloj se nalazi između dva vodonepropusna sloja tla ili stijena. U vodonosnom sloju mogu da se nalaze veće navedene adhezijske, kapilarne i podzemne vode. Znači, kretanje podzemne vode moguće je ukoliko je raspored pukotina u stijenama takav da su one međusobno povezane ili su pore u tlu međusobno povezane kao što je slučaj kod nevezanog materijala (šljunak, pijesak).



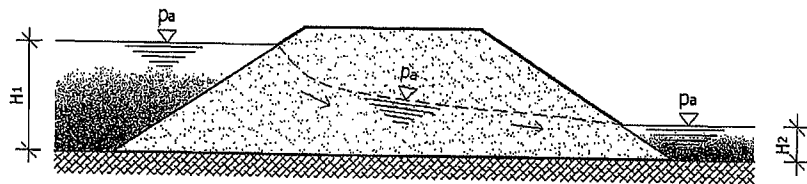
Slika 11.1 Voda u tlu

Na slici 11.1 prikazan je presjek jednog vodonosnog sloja sa adhezijskom vodom (AV), kapilarnom vodom (KV), podzemnom vodom (PV) i vodonepropusnom podinom na kraju vodonosnog sloja. Sa slike se vidi da hidrostatski pritisak u vodonosnom sloju linearno se povećava u funkciji od dubine vodonosnog sloja, odnosno ispod nivoa vodnog lica vodonosnog sloja vlada natpritisak, a iznad nivoa vodnog lica vlada potpritisak.

Adhezijska voda (*AV*) obavija čestice tla u veoma tankom sloju i vezana je električnim silama. Kapilarna voda (*KV*) može biti tzv. otvorena i zatvorena. Otvorena kapilarna voda se sakuplja na mjestima dodira čvrstih čestica ili zrna tla te se formiraju meniskusi (potpoglavlje 3.3.6 udžbenika) i ovdje je stepen zasićenosti veoma mali. Zatvorena kapilarna voda javlja se kada imamo zasićeno tlo, a pritisak vode je manji od atmosferskog. Podzemna voda (*PV*) ili kako se još naziva i gravitacijska voda pojavljuje se kada je tlo zasićeno, a pritisak vode je veći od atmosferskog pritiska. Na slici 11.1 se vidi da se voda u tlu nalazi i iznad nivoa podzemne vode i to kao kapilarna voda, te uočavamo negativan pritisak vode.

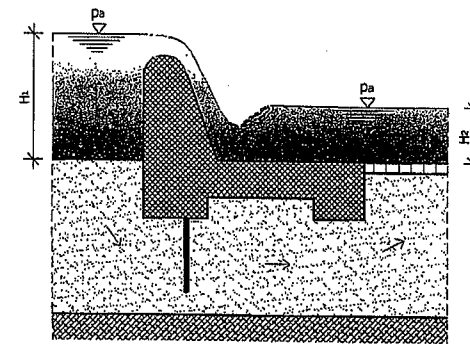
Tečenje vode kroz tlo bitno je kako za mehaniku fluida, tako je i od posebnog značaja za mehaniku tla. Slobodno se može reći da se kretanje vode kroz tlo ne dešava samo tokom konsolidacije tla, nego se ostvaruje u različitim geotehničkim i hidrotehničkim okolnostima. Dobar primjer kretanja vode kroz tlo su nasute brane i odbrambeni hidrotehnički nasipi. U ovim slučajevima voda iz vodotoka ili akumulacije vode teče (struji) kroz nasip ili nasutu branu kao i kroz temeljno tlo te je moguće da usljed tečenja vode dođe do pojave erozije koja može dovesti do rušenja takve hidrotehničke građevine.

Kada se iznad podzemnog toka vode u poroznim sredinama nalazi, takođe, porozna sredina sa atmosferskim pritiskom, tada taj podzemni tok vode zovemo **kretanje podzemne vode sa slobodnim nivoom** (slučaj tečenja kroz nasutu branu ili zemljani nasip), kao što je prikazano na slici 11.2.



Slika 11.2 Kretanje podzemne vode sa slobodnom površinom

Međutim, ukoliko je porozni sloj tla (vodonosni sloj) kroz koji se kreće podzemna voda, ovičen ili ograničen sa svoje gornje i donje strane vodonepropusnim sredinama (donja strana vodonepropusna podina, a gornja strana temelj brane), onda će u vodonosnom sloju tla nastati pritisak koji je veći od atmosferskog, a takvo kretanje vode zovemo **kretanje podzemne vode pod pritiskom**. Dobar primjer za ovakvo strujanje (tečenje) je slučaj strujanja podzemne vode ispod temelja betonske brane (slika 11.3).



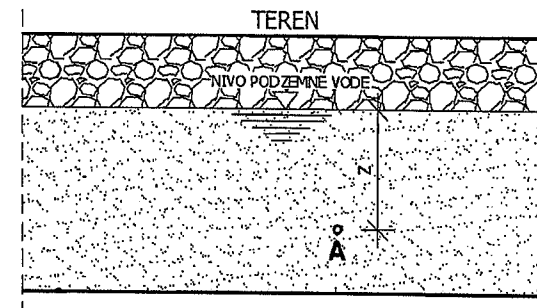
Slika 11.3 Kretanje podzemne vode pod pritiskom

Takođe, u praksi se građevinski inženjeri veoma često susreću sa problemom iskopa temeljne građevinske jame ispod nivoa podzemne vode. Naravno, potrebno je iz temeljne jame crpiti vodu radi omogućavanja izvođenja građevinskih radova i tada dolazi do snižavanja nivoa podzemne vode, ali zbog snižavanja nivoa podzemne vode u temeljnoj građevinskoj jami dolazi do kretanja vode kroz tlo prema dnu jame. Ova kretanja vode mogu biti sa velikim brzinama te je moguće izbijanje dna građevinske temeljne jame.

Naime, i kod kretanja podzemne vode može se odvijati ustaljeno (stacionarno) tečenje ukoliko se procesi procjeđivanja i filtracije ne mijenjaju tokom određenog vremenskog perioda. Posebno je zanimljivo u hidrotehničkoj praksi kretanje podzemne vode kroz nevezano tlo (sitni šljunak, pijesak i pijesak sa primjesama gline) gdje se voda kroz pore u takvom tlu kreće veoma sporo i tada imamo veoma male vrijednosti Reynoldsovog broja, pa kažemo da je tečenje podzemne vode laminarno.

11.2. Pritisak vode u tlu, hidraulički potencijal i hidraulički gradijent

Na slici 11.4 prikazana je podzemna voda u tlu sa svojim nivoom kao i tačkom A koja se nalazi na dubini z od nivoa podzemne vode.



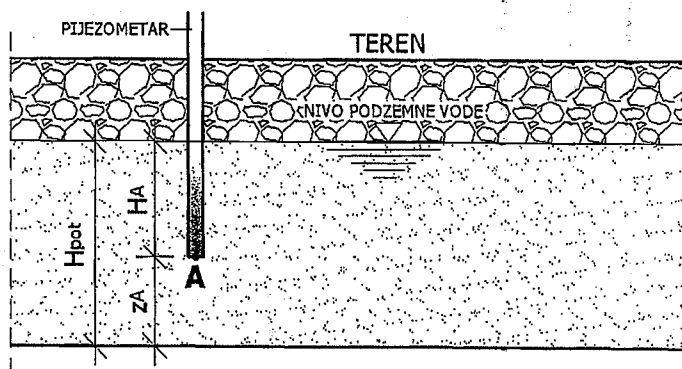
Slika 11.4 Pritisak u tački A podzemne vode

Hidrostatski pritisak vode u promatranoj tački A može se napisati na osnovu poznatog izraza, odnosno:

$$p_A = \rho_v g \cdot z \quad (11.1)$$

Pritisak podzemne vode u ovoj poroznoj sredini tla, jednakim intenzitetima djeluje u svim smjerovima.

Pritisak vode u tlu mjerimo pomoću pijeziometara. Voda ulazi u pijeziometar i jednostavno očitamo pijeziometrijsku visinu (slika 11.5). Kod sitnozrnog tla, u praksi, primjenjujemo pijeziometre koji su opremljeni elektronskim predajima na svom dnu radi mjerenja pritiska vode. Nasuprot sitnozrnog tla, kod krupnozrnog tla u praksi se primjenjuju otvorene cijevi koje na svom dnu imaju filter sa zasipom koji onemogućava prodor zrna tla u pijeziometrijsku konstrukciju.



Slika 11.5 Pijeziometar u tlu i hidraulički potencijal

Sa slike 11.5 može se vidjeti da pijeziometrijska visina u promatranoj tački A u vodonosnom (poroznom) sloju tla predstavlja visinu vodenog stupca podzemne vode u toj tački, odnosno pritisak vode u tački A :

$$p_A = \rho_v g \cdot H_A \quad (11.2)$$

Hidraulički potencijal označavamo slovom H_{pot} (m) i on je jednak sumi pijeziometrijske visine (H) i geodetske visine (z). Geodetska visina predstavlja rastojanje promatrane tačke od usvojene referentne ravnine kao što je prikazano na slici 11.6. Važno je voditi računa o položaju referentne ravnine kada određujemo hidraulički potencijal iz razloga mogućeg negativnog predznaka.

Na osnovu slike 11.5 možemo napisati izraz za hidraulički potencijal:

$$H_{pot} = H_A + z_A \quad (11.3)$$

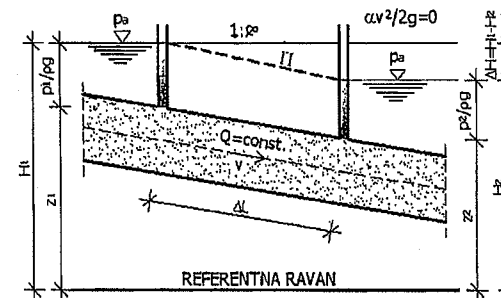
11.3. Zakon laminarnog tečenja

Laminarno tečenje podzemnih voda dešava se prema zakonitosti koju je na osnovu eksperimenata otkrio Darcy još negdje sredinom XIX vijeka. Naime, Darcy je došao do zaključka da prilikom sporog tečenja podzemne vode, njena brzina filtracije je direktno proporcionalna pijeziometrijskoj razlici ili hidrauličkom gradijentu I_E (I_o). Hidraulički gradijent, u hidrotehničkoj praksi, označavamo obično slovom I , te kao što je već navedeno, a može se izraziti kao:

$$I_E = I_o = -\frac{\Delta H}{\Delta L} \quad (11.4)$$

ΔH je visinska razlika pijeziometrijske linije između dva promatrana presjeka, prema slici 11.6, odnosno:

$$\Delta H = H_1 - H_2 \quad (11.5)$$



Slika 11.6 Laminarno procjeđivanje i hidraulički parametri

Brzina filtracije zavisi od odnosa protoka vode koja se kreće poroznom sredinom i proticajne površine poprečnog presjeka poroznog materijala, odnosno, Darcyev zakon može se napisati preko slijedećeg izraza:

$$v = \frac{Q}{A} = k \cdot I_o = -k \frac{\Delta H}{\Delta L} \quad (11.6)$$

gdje je;

v – brzina procjeđivanja (m/s),

Q – protok podzemne vode (m³/s),

A – proticajna površina poprečnog presjeka poroznog materijala (m²),

k – koeficijent procjeđivanja (m/s),

ΔL – dužina promatrane dionice toka (m).

Na slici 11.6 prikazane su visine H_1 i H_2 . Visina H_1 je pijezometarska visina na ulaznom dijelu promatrane dionice toka podzemne vode, dok je H_2 pijezometarska visina na izlaznom dijelu promatrane dionice toka podzemne vode. U izrazu 11.6 vidi se da je brzina filtracije proizvod koeficijenta filtracije ili poroznosti tla i hidrauličkog gradijenta, a predznak „minus“ je zbog toga što voda teče u jednom smjeru, a u istom tom smjeru pijezometarska visina opada, što se vidi na prethodnoj slici. Izraz za brzinu filtracije (v) predstavlja onu brzinu kretanja podzemne vode, kada bi se (teoretski) ona kretala kroz cijeli poprečni presjek porozne sredine, a ne samo kroz pore između zrna čestica tla, što je realno strujanje u poroznoj ili vodonosnoj sredini. Takođe, posebno je zanimljivo da koeficijent filtracije (k) ili koeficijent propusnosti se izražava kao i brzina kretanja (m/s), što znači da pri hidrauličkom gradijentu veličine 1, odnosno $\Delta H/\Delta L=1$, brzina filtracije jednaka je koeficijentu filtracije. Isto tako, ukoliko je hidraulički gradijent jednak nuli, onda nema kretanja podzemne vode kroz tlo. Hidraulički gradijent je vektorska veličina i pozitivan je u smjeru tečenja podzemne vode, a voda teče (struji) od mjesta većeg hidrauličkog potencijala prema mjestu manjeg potencijala.

Koeficijent filtracije ili koeficijent propusnosti (k) je osnovna karakteristika tla za kretanje vode kroz tlo i njegova veličina zavisi od vrste tla i postojanja diskontinuiteta. Koeficijent filtracije određuje se eksperimentalnim putem. Kod iste vrste tla koeficijent filtracije ili propusnosti može da se kreće u dosta širokim granicama, u funkciji od poroznosti tla, temperaturnih promjena i slično. Izrazom 11.6 definisan je Darcyev zakon koji se odnosi samo za laminarno tečenje podzemne vode gdje je Reynoldsov broj $Re < 10$. Reynoldsov broj može se odrediti na osnovu sličnog izraza o kome je već bilo govora u prethodnim poglavljima knjige, odnosno:

$$R_e = \frac{v \cdot \bar{d}}{\nu} \quad (11.7)$$

gdje je;

\bar{d} - srednji prečnik zrna tla (m),

v – brzina tečenja podzemne vode (m/s),

ν – kinematski koeficijent viskoznosti vode (m^2/s).

Vrijednosti koeficijenta filtracije ili propusnosti (k) date su u narednoj tabeli u funkciji vrste tla:

Tabela 14. Srednje vrijednosti koeficijenta filtracije

Vrsta tla	Srednja vrijednost koeficijenta filtracije k (m/s)
Gline i prašnaste gline (>20% gline)	$< 10^{-10}$ do $2 \cdot 10^{-7}$
Veoma fini pijesak i prašina	$2 \cdot 10^{-7}$ do $9 \cdot 10^{-5}$
Čist pijesak, mješavina pijeska i šljunka	$9 \cdot 10^{-5}$ do $6 \cdot 10^{-2}$
Čist šljunak	$6 \cdot 10^{-2}$ do 1,0

Ako je $k < 10^{-6}$ cm/s onda se smatra da je tlo ili stijena vodonepropusno kao, na primjer, glinoviti sedimenti.

Koeficijent filtracije određujemo u laboratorijama na dva načina, a sve u zavisnosti od vrste tla. Naime, kod sitnozrnog tla koristimo tzv. metodu sa promjenjivom razlikom hidrauličkog potencijala, dok kod krupnozrnog tla koristimo metodu sa stalnom razlikom hidrauličkog potencijala. Stalna (konstantna) razlika hidrauličkog potencijala osigurat će se stalnim dolijevanjem vode kroz uzorak tla, gdje stalno dolijevanje vode nadoknađuje vodu koja ističe iz uzorka tla u posudu u kojoj mjerimo protok vode (Q). Ovakva metoda je moguća isključivo za krupnozrna tla kod kojih imamo veoma brzo protjecanje vode.

Na osnovu određivanja brzine tečenja vode u tlu, Darcyev zakon može se primjeniti za slučaj prostornog kretanja podzemne vode sa određivanjem komponenti brzine u tri koordinatne ose, i to:

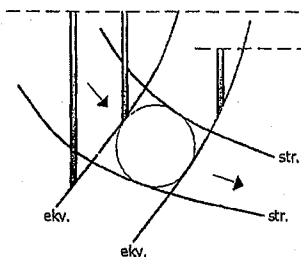
$$v_x = -k \frac{\partial H}{\partial x} ; \quad v_y = -k \frac{\partial H}{\partial y} ; \quad v_z = -k \frac{\partial H}{\partial z} \quad (11.8)$$

Potencijalno tečenje vode primjenjuje se u hidrotehničkoj praksi za određivanje procjeđivanja vode ispod, na primjer, temelja brane. U ovakvom slučaju postoje pravci kretanja podzemne vode i njihove horizontalne i vertikalne komponente brzine.

11.4. Strujna mreža

U hidromehanici se problemi kretanja (strujanja) podzemne vode kroz poroznu sredinu mogu svesti na dvodimenzionalno strujanje. Važno je odrediti strujnu mrežu vode ispod temelja hidrotehničkih objekata, što je veoma čest slučaj u praksi, tako da je potrebno poznavati pojam strujnice, ekvipotencijale i same strujne mreže.

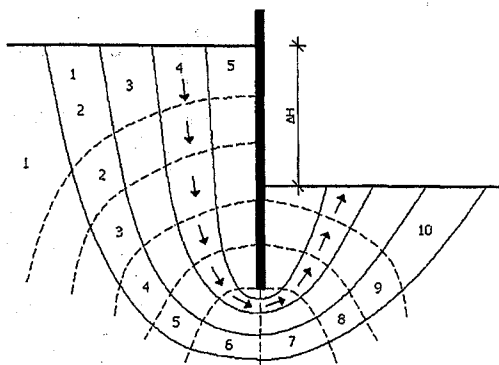
Strujnice predstavljaju krive linije kojima su tangente vektori brzina u svakoj tački. Inače, strujnice se nigdje ne sijeku, osim ukoliko u promatranom prostoru nema izvor vode. Površinu između dvije susjedne strujnice ili između dvije odabrane strujnice nazivamo **strujnom cijevi**. Pošto su brzine strujanja uvijek tangente na ivične strujnice onda je i protok duž strujne cijevi nepromjenjiv.



Slika 11.7 Strujnice i ekvipotencijale izotropne homogene sredine

Ekvipotencijale su krive linije koje sačinjavaju tačke istog ukupnog potencijala ili drugačije rečeno, zbir geodetske i pijeziometarske visine konstantan je duž neke ekvipotencijale. Kao i strujnice, ekvipotencijale se nigdje ne sijeku ukoliko u promatranom prostoru nema izvora vode.

Strujna mreža predstavlja skup strujnica i ekvipotencijala. Kod izotropnih homogenih sredina strujnice i ekvipotencijale su međusobno upravne i imamo tzv. kvadratnu strujnu mrežu kod koje se u svako tzv. polje koje je oivičeno sa dvije susjedne strujnice i dvije susjedne ekvipotencijale može upisati kružnica. Kod ovakvih strujnih mreža pad potencijala između svake dvije susjedne ekvipotencijale je isti, a i protok vode kroz svake dvije strujne cijevi je isti.



Slika 11.8 Strujna mreža

Na slici 11.8 prikazano je tečenje (strujanje) podzemne vode kroz izotropno i homogeno tlo, oko jedne zagatne stijene koja se ugrađuje prilikom izvođenja građevinske jame nekog hidrotehničkog ili drugog građevinskog objekta. Kod iskopa građevinske jame ispod nivoa podzemne vode potrebno je održavati nivo podzemne vode pri dnu građevinske jame.

Naime, razlika ukupnih potencijala odgovara udaljenosti dva nivoa vode i to podzemne vode oko same građevinske jame i nivoa vode na dnu građevinske jame. Kao što je ranije navedeno, upravo zbog postojanja razlike ukupnih

potencijala odvija se i tečenje (strujanje) vode. Na slici 11.8 prikazana je strujna mreža koja odgovara za izotropno i homogeno tlo. Međutim, za određivanje protoka vode kao i radi utvrđivanja mogućeg hidrauličkog sloma dna građevinske jame, odredit ćemo broj strujnih cijevi (n_s) i broj ekvipotencijala ($n_e + 1$). Broj ekvipotencijala predstavlja broj jednakih padova potencijala (n_e) tako da je pad potencijala između dvije susjedne ekvipotencijale:

$$\frac{\Delta H}{n_e} \quad (11.9)$$

Na slici 11.8 imamo pet strujnih cijevi ($n_s=5$) i $n_e=10$. Protok vode, sa slike 11.8 može se odrediti na način da promatramo jedan kvadrat sa jednom strujnom cijevi (oznaka s) i jednim padom ili ekvipotencijalom (oznaka e). Širina strujne cijevi iznosi ∂_{se} . Prema Darcyevom zakonu brzina tečenja kroz strujnu cijev iznosi:

$$v_{se} = k_{se} \cdot i_{se} = k_{se} \cdot \frac{\Delta H_{se}}{\partial_{se}} \quad (11.10)$$

Prema ovome, protok kroz promatranu strujnicu može se napisati pomoću izraza:

$$Q_s = v_{se} \cdot \partial_{se} \quad (11.11)$$

Ukupna veličina protoka odgovara sumi protoka vode kroz sve strujne cijevi, odnosno:

$$Q = \sum v_{sp} \partial_{sp} = k \cdot \frac{\Delta H}{n_e} \cdot n_s \quad (11.12)$$

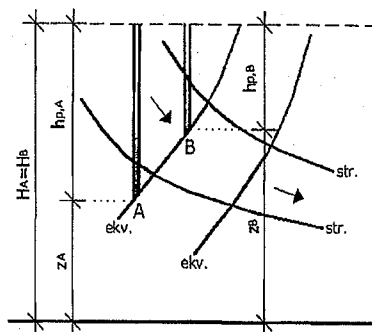
gdje je;

ΔH – ukupni pad potencijala,

n_e – broj istih padova potencijala,

n_s – broj strujnih cijevi.

Kao što je naprijed već navedeno, ekvipotencijale predstavljaju krivu liniju na kojoj je ukupni potencijal isti za sve tačke. Na slici 11.9 prikazane su dvije susjedne strujnice i ekvipotencijale.



Slika 11.9 Određivanje pritiska na ekvipotencijali

Prema slici 11.9 određena je veličina pritiska na jednoj ekvipotencijali odnosno pritisak u tački A i tački B je isti i sastoji se od zbir geodetske i pijezometarske visine, odnosno:

$$H_A = z_A + h_{p,A} \Rightarrow H_B = z_B + h_{p,B} \Rightarrow H_A = H_B \quad (11.13)$$

Geometrijski oblik strujne mreže ne zavisi od veličine pritiska niti od koeficijenta filtracije, već samo zavisi od granica filtracijskog tečenja. U inženjerskoj praksi, za jednostavnije slučajeve kada tečenje podzemne vode možemo smatrati horizontalnim u najvećem dijelu površine podzemnog toka, onda primjenjujemo izraz Dupuita:

$$v = -k \cdot \frac{dH}{dL} = k \cdot I_0 \quad (11.14)$$

Dupuitov izraz govori o vertikalnosti ekvipotencijala ili bolje rečeno da je pijezometarska visina nepromjenjiva u cijelom presjeku toka podzemne vode. I kod Dupuitove postavke potrebno je izračunati srednju brzinu filtracije ili tečenja podzemne vode, tako da na osnovu Dupuitove postavke o nepromjenjivosti tečenja u promatranom presjeku tečenja podzemne vode imamo još jednostavniju teoriju tečenja podzemne vode koju nazivamo hidraulička teorija. Prema tome, specifični protok podzemne vode može se jednostavno predstaviti u obliku:

$$q = v \cdot M \Rightarrow q = -k \frac{dH}{dL} \cdot M \quad (11.15)$$

gdje je;

M – visina presjeka protoka podzemne vode.

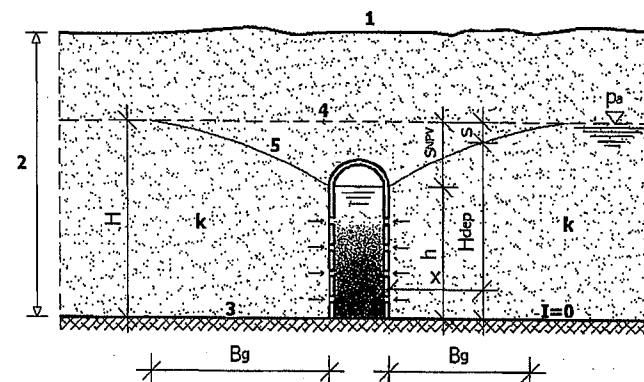
U inženjerskoj hidrotehničkoj praksi izrazi 11.14 i 11.15 imaju osnovnu važnost, jer na osnovu njih može se izračunati tečenje podzemne vode prema različitim vodozahvatnim objektima kao što su drenažne galerije i bunari.

11.5. Strujanje podzemne vode ka vodozahvatima

Proračun vodozahvata zasniva se na Dupuitovoj pretpostavci i ustaljenom (stacionarnom) tečenju kada postoji ravnoteža između količine crpljenja podzemne vode i količine vode koja dotiče. Na ovim postavkama analiziraju se tečenja podzemne vode prema horizontalnim vodozahvatima (galerije) i prema bunarima.

a) Galerije

U slučajevima kada je vodonosni sloj male debljine za vodozahvat se grade galerije koje imaju dovoljno veliku dužinu da dobijemo dovoljne količine vode (slika 11.10). Galerije se grade u otvorenom rovu kada je mala dubina podzemne vode i dubina vodonepropusne podine. Ukoliko se radi o velikim količinama podzemne vode obavezno koristimo talpe i podgradu. Za slučaj dubokog vodonosnog sloja, galerije gradimo kao tunele. Kod velikih količina podzemne vode galerije gradimo od zidanog kamena ili polaganjem dijelova galerije u obliku cijevi, dok kod malih količina podzemnih voda galerije gradimo od kamenih naslaga ili od drenažnih cijevi odgovarajućeg prečnika.



Slika 11.10 Tečenje podzemne vode ka galeriji

1 – teren ; 2 – debljina vodonosnog sloja ; 3 – vodonepropusna podina ;
4 – statički nivo podzemne vode ; 5 – linija depresije (sniženja) nivoa podzemne vode

Na slici 11.10 prikazan je poprečni presjek galerije pravougaonog poprečnog presjeka čije je dno na ravnom vodonepropusnom sloju tla. Dubina podzemne vode u vodonosnom sloju iznosi H , dok dubina vode u galeriji iznosi h . Sniženje nivoa podzemne vode, prema slici, označeno je sa s_{NPV} i predstavlja razliku dubine podzemne vode i dubine podzemne vode u galeriji, odnosno:

$$s_{NPV} = H - h \quad (11.16)$$

Takođe, sa slike vidimo da oblik linije depresije ili sniženja nivoa podzemne vode na bilo kojoj tački slobodnog nivoa podzemne vode zavisi od dubine podzemne vode u vodonosnom sloju (H) i od dubine H_{dep} na udaljenosti x gdje određujemo položaj slobodne površine vode na depresionoj liniji, odnosno:

$$s_{dep} = H - H_{dep} \quad (11.17)$$

Širina uticaja galerije (B_g) predstavlja dužinu od zida galerije sve dok depresiona kriva linija ponovo ne bude na statičkom nivou podzemne vode, odnosno to je dužina tzv. zamišljenog prihranjivanja galerije. U promatranom slučaju na slici 11.10 imamo horizontalno tečenje podzemne vode sa slobodnim vodnim licem koje je postepeno promjenjivo i ovakvo tečenje može se izraziti na osnovu izraza 11.14 i 11.15. Dotok podzemne vode (Q) u promatranu galeriju na slici 11.10 u slučaju tzv. dvostranog prihranjivanja (dotok vode sa obje strane galerije), može se napisati u obliku:

$$Q = 2qL_g = 2kL_g H_{dep} \frac{dH}{dx} \quad (11.18)$$

gdje je;

L_g – dužina vodozahvata galerije (m).

Iz izraza 11.18 može se vidjeti da imamo pozitivan hidraulički gradijent, a to je zbog toga što sa povećanjem dubine odnosno nivoa podzemne vode na depresionoj krivoj liniji (H_{dep}) povećava se i horizontalna dužina depresione krive linije (x).

Sređivanjem prethodnog uzraza imamo:

$$Q dx = 2kL_g H_{dep} dH \quad (11.19)$$

Dalje, ukoliko su dužina vodozahvata galerije i koeficijent filtracije nepromjenjivi, onda u granicama integriranja od $x=0$ do $x=B_g$ te od $H_{dep}=h$ do $H_{dep}=H$, imamo:

$$Q = kL_g \frac{H^2 - h^2}{B_g} \quad (11.20)$$

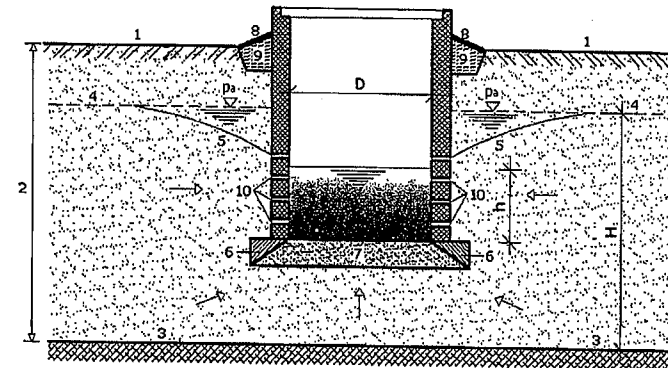
b) Bunari

Bunari predstavljaju vertikalne vodozahvatne građevine i po svojoj konstrukciji i načinu izvedbe mogu biti kopani, bušeni i pobijani. U vodovodnim sistemima, za kvalitetno vodosnabdjevanje, uglavnom se izvode bušeni bunari i znatno

rjeđe kopani bunari. Kopani bunari uglavnom se izvode kod privatnih objekata odnosno kod individualnog vodosnabdjevanja, dok se pobijani bunari uglavnom koriste kod odvodnjavanja.

Kopani bunari se primjenjuju kod dobijanja podzemne vode sa slobodnim vodnim nivoom na dubinama do 20 m ili izuzetno do 35 m od površine terena. U praksi se kopani bunari uglavnom izvode kao nesavršeni bunari (dno bunara se završava u vodonosnom sloju) pa imamo dotok podzemne vode i kroz otvore na zidovima bunara i kroz dno bunara.

Kopane bunare možemo izvoditi na licu mjesta (monolitno) ili montažnim načinom gradnje. Montažna izvedba kopanih bunara je jedan savremen pristup gradnje na način da spuštamo prefabrikovane armirano betonske prstenove, dok je gradnja kopanih bunara na licu mjesta moguća kada je nivo podzemne vode relativno plitko odnosno bliže površini terena kao i kod većih prečnika kopanih bunara.



Slika 11.11 Kopani nesavršeni bunar

- 1 – teren ; 2 – vodonosni sloj ; 3 – vodonepropusni sloj ; 4 – statički nivo podzemne vode ;
5 – depresiona linija (linija sniženja nivoa podzemne vode) ; 6 – zakošene ivice dna bunara ;
7 – filter (šljunčano-pješčani) ; 8 – uređenje oko bunara na površini terena ; 9 – glineni „čep“ ;
10 – otvori u zidu bunara

Unutarnji prečnik bunara (D) iznosi najviše 3,0 do 4,0 metra. Dubina vode u bunaru (h) iz razloga zahvatanja vode treba da iznosi minimum 1,0 do 2,0 metra. Ukoliko na terenu imamo malu dubinu podzemne vode onda je moguća i izvedba savršenog kopanog bunara čije se dno završava u vodonepropusnoj podlogi, te u tom slučaju nema dotjecanja vode sa dna bunara. U praksi se često koristi tzv. grupa bunara, ukoliko izdašnost odnosno kapacitet jednog bunara ne zadovoljava naše potrebe za vodom. U tom slučaju bunari se raspoređuju duž linije koja je upravna na smjer tečenja podzemne vode i vršimo međusobno spajanje bunara pomoću sifonskog cjevovoda (nivo podzemne vode u bunaru iznosi najviše 7,0 m), gravitacijskim tlačnim cjevovodom (kod arteških i subarteških bunara) ili potisnim cjevovodom (primjenom potapajućih pumpi).

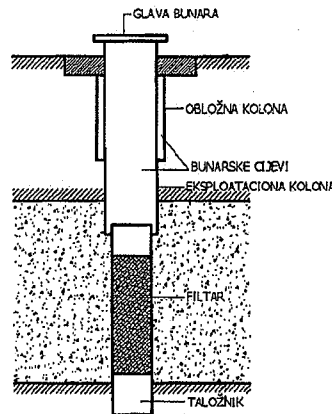
Bušeni bunari se rade kada je podzemna voda na većim dubinama i kada je vodonosni sloj veće debljine. Ovi bunari se primjenjuju kod podzemnih voda sa slobodnim vodnim nivoom (običan bunar) i kod podzemnih voda pod pritiskom (arteški i subarteški bunar), gdje u svim navedenim slučajevima bušeni bunari mogu biti savršeni i nesavršeni. Savršeni bunari se prostiru po vertikali sve do vodonepropusne podloge, a nesavršeni bunari se završavaju u vodonosnom sloju.

Bušeni bunari imaju svoje određene prednosti u odnosu na druge vodozahvatne građevine podzemnih voda, i to su:

- velika dubina zahvatanja podzemne vode,
- dobijanje relativno većih količina podzemne vode,
- nezavisnost od geološkog sastava tla,
- ekonomičnost.

Kao što sam naziv govori, bušene bunare izvodimo bušenjem vertikalnih bušotina u tlu. Prilikom bušenja vršimo zaštitu bušotine obično zaštitnim čeličnim cijevima koje ujedno i formiraju bušeni bunar. Prečnik jednog bušenog bunara kreće se u granicama od 0,15 do 3,00 metra.

Bušeni bunar se sastoji od tri osnovna dijela, i to glave bunara, tijela bunara i filtra sa zasipom i taložnikom.



Slika 11.12 Bušeni bunar sa osnovnim dijelovima

Glava bunara je veza vrha bunara sa tijelom bunara na mjestu izlaza bunara na površinu terena. Glava bunara predstavlja zaštitu bunara od infiltracije površinskih voda i onečišćenja koja mogu dospjeti u bunar. Naime, pod glavom bunara podrazumijeva se konstrukcija koja služi za mjerenje nivoa podzemne vode, mjerenje pritiska, za uzimanje uzoraka vode i slično kao i za odvođenje zahvaćene podzemne vode odgovarajućim potisnim cjevovodom dalje prema vodovodnoj mreži. Iznad glave bunara se gradi šaht sa ili bez kućice u kome se ugrađuju navedeni mjerni uređaji.

Tijelo bunara se izvodi obično od više koncentričnih nizova cijevi kojima omogućavamo dovod podzemne vode do površine terena.

Filtar predstavlja poseban dio bušenog bunara čiji je zadatak prihvaćanje podzemne vode iz vodonosnog sloja uz onemogućavanje ulaska čestica tla u bunar, tako da filtari ujedno predstavljaju i najosjetljiviji dio bunara od koga uglavnom zavisi i izdašnost bušenog bunara. Filtri mogu biti:

- mrežasti (prorupčana cijev omotana mesinganom, bakrenim ili plastičnim mrežama sa kružnim, ovalnim ili kvadratnim perforacijama),
- prorupčani (prorupčane čelične cijevi),
- šljunčani (prorupčana cijev oko koje se ugrađuje sloj šljunka određene krupnoće zrna agregata).

Neovisno od tipa filtera duž čitavog vodonosnog sloja vrši se zasip čistim agregatom odgovarajućeg prečnika koji se mora proračunati u odnosu na karakteristike vodonosnog sloja i tipa filtera.

Proračunavanje dotjecanja podzemne vode u pojedinačne bušene bunare zavisi od vrste tečenja podzemne vode ka bunarima i od dubine prorupčanog dijela bunara (filtar).

Taložnik je najdublji dio bunarske konstrukcije, dužine 3,0 do 6,0 m, u kome se talože čestice tla i stijene koje prođu kroz filtari u bunar.

Prema položaju vodonosnog sloja u odnosu na vodonepropusne slojeve tla i stijena, bunari mogu biti:

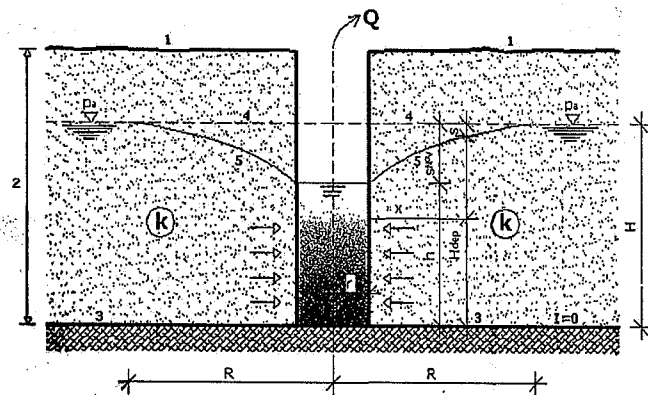
- a) obični bunari (tečenje podzemne vode sa slobodnim vodnim nivoom),
- b) arteški i subarteški bunari (tečenje podzemne vode pod pritiskom).

Prema dubini prorupčanog dijela bunara, podjela je na:

- a) savršene bunare,
- b) nesavršene bunare.

Dotjecanje podzemne vode ka običnom savršenom bunaru:

Proračun se vrši na osnovu Dupuitove pretpostavke kao i kod dotjecanja podzemne vode u galeriju (horizontalni vodozahvat).



Slika 11.13 Obični savršeni bunar

1 – površina terena ; 2 – vodonosni sloj ; 3 – vodonepropusna podloga ;
4 – statički nivo podzemne vode ; 5 – kriva depresije (snizavanje nivoa podzemne vode)

Dotok podzemne vode ka običnom savršenom bunaru (Q_{opb}) može se odrediti prema sljedećem izrazu:

$$Q_{opb} = \pi \cdot k \frac{H^2 - h^2}{\ln \frac{R}{r}} \quad (11.21)$$

gdje je;

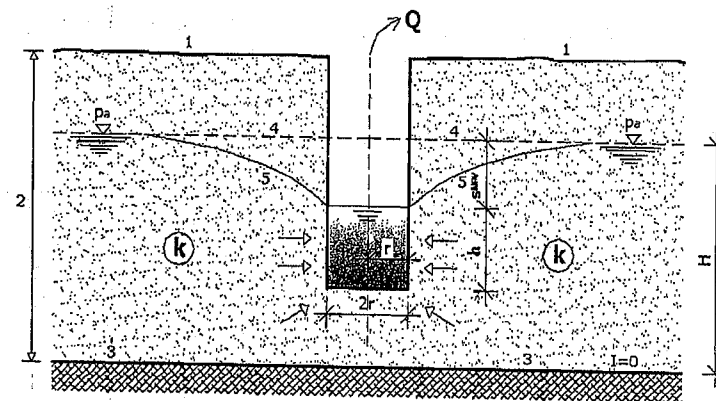
R – poluprečnik (radijus) dejstva bunara (m),

r – unutarnji radijus bunara (m),

k – koeficijent propusnosti.

Dotjecanje podzemne vode ka običnom nesavršenom bunaru:

Kod običnog nesavršenog bunara dotok podzemne vode u bunar ne može se odrediti na osnovu Dupuitove hipoteze zbog toga što postoji i tečenje podzemne vode u vertikalnom smjeru sa određenim vertikalnim komponentama brzine (dotok vode preko dna bunara).



Slika 11.14 Obični nesavršeni bunar

1 – površina terena ; 2 – vodonosni sloj ; 3 – vodonepropusna podloga ;
4 – statički nivo podzemne vode ; 5 – kriva depresije (snizavanje nivoa podzemne vode)

Dotjecanje podzemne vode preko dna bunara nije zanemarljivo tako da je određivanje dotjecanja ka običnom nesavršenom bunaru dosta složeno. U hidrotehničkoj praksi dotok podzemne vode ka običnom nesavršenom bunaru (Q_{onb}) određuje se prema formuli Girinskog:

$$Q_{onb} = \pi \cdot k \frac{(2h - s_{NPV}) \cdot s_{NPV}}{\ln \frac{2h - s_{NPV}}{1,2r}} \quad (11.22)$$

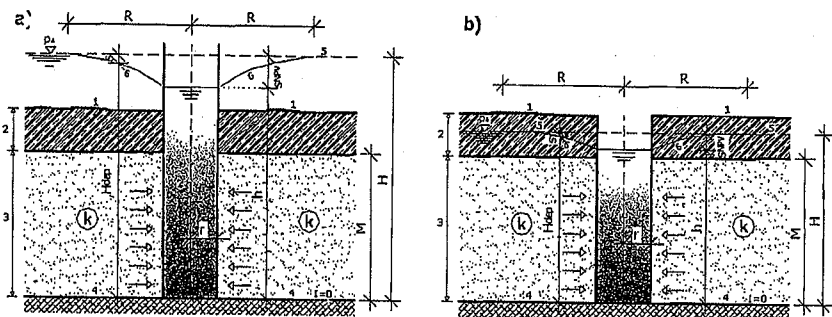
gdje je;

s_{NPV} – sniženje nivoa podzemne vode u bunaru.

Prethodna formula vrijedi za odnos $h < H/3$.

Dotjecanje podzemne vode ka arteškom ili subarteškom savršenom bunaru:

Kod hidrauličkog proračuna arteškog ili subarteškog bunara uopšte nije bitno da li je nivo podzemne vode u bunaru iznad površine terena (arteški bunar) ili se nalazi unutar debljine vodonepropusnog sloja pri površini terena (subarteški bunar).



Slika 11.15 a) Arteški savršeni bunar b) Subarteški savršeni bunar
 1 – površina terena ; 2 – vodonepropusni gornji sloj tla ; 3 – vodonosni sloj ;
 4 – vodonepropusna podloga ; 5 – statički nivo podzemne vode ;
 6 - kriva depresije (snizavanja nivoa podzemne vode)

Dotjecanje podzemne vode ka savršenom arteškom ili subarteškom bunaru (Q_{aspb}) može se izračunati prema slijedećem izrazu:

$$Q_{aspb} = 2\pi \cdot k \cdot M \frac{H-h}{\ln \frac{R}{r}} \quad (11.23)$$

gdje je;

M – debljina sloja podzemne vode pod pritiskom (između dvije vodonepropusne podloge),

H – visina koja odgovara pritisku podzemne vode u datom vodonosnom sloju,

h – nivo vode u arteškom ili subarteškom bunaru.

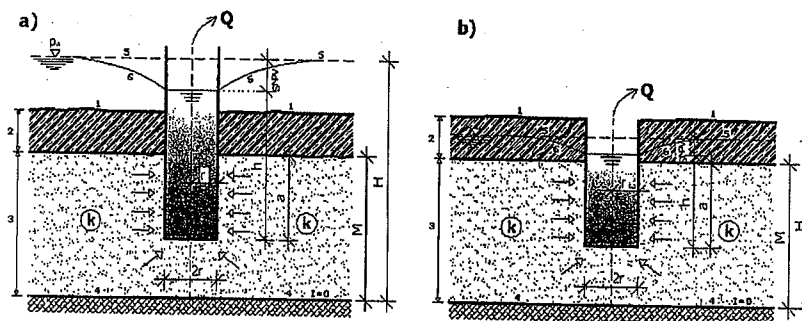
Dotjecanje podzemne vode ka arteškom ili subarteškom nesavršenom bunaru:

Dotok podzemne vode ka arteškom ili subarteškom nesavršenom bunaru (Q_{asnb}) isto kao i kod običnog nesavršenog bunara ne može se odrediti prema Dupuitovoj hipotezi, već za njegov hidraulički proračun koristimo formulu Babuškina, gdje od posebnog značaja na veličinu dotoka utiče dubina uronjenog prorupčanog dijela bunara u vodonosnom sloju (a), odnosno:

$$Q_{asnb} = 2\pi \cdot k \frac{a \cdot s_{NPV}}{\ln \frac{1,26}{r}} \quad (11.24)$$

Navedeni izraz vrijedi u slučaju da je $a < \frac{M}{3}$.

Na slici 11.16 prikazani su arteški (a) i subarteški (b) nesavršeni bunar.



Slika 11.16 a) Arteški nesavršeni bunar b) Subarteški nesavršeni bunar
 1 – površina terena ; 2 – vodonepropusni gornji sloj tla ; 3 – vodonosni sloj ;
 4 – vodonepropusna podloga ; 5 – statički nivo podzemne vode ;
 6 - kriva depresije (snizavanja nivoa podzemne vode)

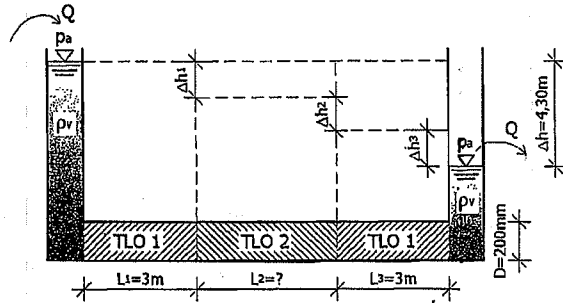
Svi do sada navedeni izrazi se odnose na jedan bunar odnosno za proračun dotjecanja podzemne vode ka jednom bunaru. Kod bunara pod pritiskom (arteški i subarteški bunar) smanjenje nivoa podzemne vode je linearno proporcionalno sa dotjecanjem vode, a kod bunara sa slobodnim vodnim licem (običan bunar) smanjenje nivoa podzemne vode sa dotjecanjem vode je nelinearno. Ovo je naročito važno kod proračunavanja grupe bunara, jer kod linearne zavisnosti dotjecanja podzemne vode i smanjenja nivoa podzemne vode možemo primjeniti načelo superpozicije na osnovu kojih izvodimo izraze za određivanje dotoka ka bunarima. Kod nelinearne zavisnosti između dotjecanja podzemne vode i njenog smanjenja nivoa, određivanje dotoka podzemne vode je dosta složeno.

11.6. Riješeni zadaci iz filtracije podzemnih voda

Zadatak 11.6.1.

Za laminarni slučaj tečenja kroz porozno tlo sa datim koeficijentima propusnosti k_{f1} i k_{f2} , izmjeren je protok $Q=5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$. Potrebno je odrediti visinske razlike Δh_1 , Δh_2 i Δh_3 kao i dužinu L_2 poroznog tla 2 u datom sistemu koji omogućavaju protjecanje datog protoka Q . Nacrtati piježometarsku liniju.

Zadato: $k_{f1}=3 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$; $k_{f2}=5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$; $Q=5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$.



RJEŠENJE

Određivanje visinskih razlika Δh_1 :

$$Q = A \cdot v$$

$$v_f = k_f \cdot I \Rightarrow v_f = k_f \frac{\Delta h}{\Delta L}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3$$

$$Q_1 = A_1 \cdot v_{f1} = A_1 \cdot k_{f1} \frac{\Delta h_1}{\Delta L_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot k_{f1} \frac{\Delta h_1}{\Delta L_1} = \frac{D^2 \pi \cdot k_{f1} \cdot \Delta h_1}{4 \Delta L_1}$$

$$D^2 \pi \cdot k_{f1} \cdot \Delta h_1 = Q_1 \cdot 4 \Delta L_1$$

$$\Delta h_1 = \frac{4 Q_1 \Delta L_1}{D^2 \pi \cdot k_{f1}} \Rightarrow \Delta h_1 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 3,0}{0,2^2 \pi \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = \frac{0,000006}{0,000003768}$$

$$\Delta h_1 = 1,59 \text{ m}$$

$$Q_3 = A_3 \cdot v_{f3} = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot k_{f3} \frac{\Delta h_3}{\Delta L_3} \Rightarrow Q_3 = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot k_{f3} \frac{\Delta h_3}{\Delta L_3} = \frac{D^2 \pi \cdot k_{f3} \cdot \Delta h_3}{4 \Delta L_3}$$

$$D^2 \pi \cdot k_{f3} \cdot \Delta h_3 = Q_3 \cdot 4 \Delta L_3$$

$$\Delta h_3 = \frac{4 Q_3 \Delta L_3}{D^2 \pi \cdot k_{f3}} \Rightarrow \Delta h_3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 3,0}{0,2^2 \pi \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = \frac{0,000006}{0,000003768}$$

$$\Delta h_3 = 1,59 \text{ m}$$

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 \Rightarrow \Delta h_2 = \Delta h - \Delta h_1 - \Delta h_3$$

$$\Delta h_2 = 4,30 - 1,59 - 1,59 \Rightarrow \Delta h_2 = 1,12 \text{ m}$$

Određivanje dužine L_2 porozne sredine sa koeficijentom propusnosti k_{f2} :

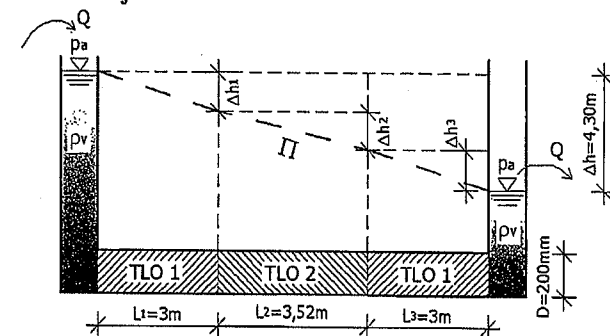
$$Q_2 = A_2 \cdot v_{f2} \Rightarrow Q_2 = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot k_{f2} \frac{\Delta h_2}{\Delta L_2} = \frac{D^2 \pi \cdot k_{f2} \cdot \Delta h_2}{4 \Delta L_2}$$

$$4 Q_2 \cdot \Delta L_2 = D^2 \pi \cdot k_{f2} \cdot \Delta h_2$$

$$\Delta L_2 = \frac{D^2 \pi \cdot k_{f2} \cdot \Delta h_2}{4 Q_2} \Rightarrow \Delta L_2 = \frac{0,2^2 \pi \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 1,12}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = \frac{0,000007033}{0,000002}$$

$$\Delta L_2 = 3,52 \text{ m}$$

Piježometarska linija:

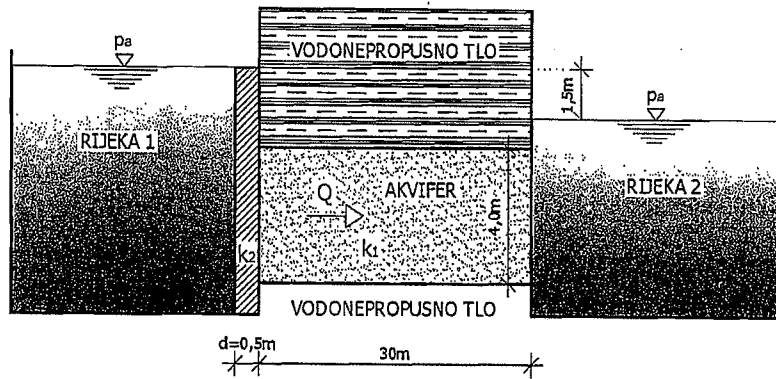


Zadatak 11.6.2.

Dvije susjedne rijeke sa različitim nivoima vode povezane su podzemnim vodopropusnim slojem. Provedena su mjerenja koja su rezultirala protokom $Q=2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}'$ kroz akvifer. Pri proračunu smatrati stacionarno tečenje.

- Izračunati koeficijent vodopropusnosti k_{f1} kroz akvifer. Između rijeke 1 i akvifera nalazi se sloj tla debljine $d=0,5 \text{ m}$, sa koeficijentom vodopropusnosti $k_{f2}=1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$.
- Izračunati protok vode kroz vodonosnik nakon prolaska kroz sloj tla debljine $d=0,5 \text{ m}$.

Zadato: $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$; $g=9,81 \text{ m/s}^2$; $v=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $Q=2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}'$; $d=50 \text{ cm}$
 $k_{f2}=1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$.

**RJEŠENJE**

- a) **Određivanje koeficijenta vodopropusnosti k_{f1} :**

$$v_f = k_f \cdot I \Rightarrow I = \frac{\Delta H}{\Delta L} = \frac{1,50}{30,0} = 0,05$$

$$v_{f1} = \frac{Q}{A} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{4,0 \cdot 1,0} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{4,0} \Rightarrow v_{f1} = 0,000005 \text{ m/s}$$

$$v_{f1} = k_{f1} \cdot I \Rightarrow k_{f1} = \frac{v_{f1}}{I} = \frac{0,000005}{0,05} \Rightarrow k_{f1} = 0,0001 \text{ m/s}$$

- b) **Određivanje protoka vode kroz vodonosni sloj:**

$$Q = Q_1 = Q_2 \quad A = A_1 = A_2 \quad v_f = v_{f1} = v_{f2}$$

Akvifer ćemo označiti indeksom 1, pa imamo:

$$v_{f1} = k_{f1} \frac{\Delta h_1}{L_1} \quad v_{f2} = k_{f2} \frac{\Delta h_2}{L_2}$$

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 \Rightarrow \Delta h_1 = \Delta h - \Delta h_2$$

$$v_f = v_{f1} = v_{f2} \Rightarrow k_{f1} \frac{\Delta h_1}{L_1} = k_{f2} \frac{\Delta h_2}{L_2}$$

$$k_{f1} \frac{\Delta h - \Delta h_2}{L_1} = k_{f2} \frac{\Delta h_2}{L_2} \Rightarrow k_{f1} \frac{\Delta h}{L_1} - k_{f1} \frac{\Delta h_2}{L_1} = k_{f2} \frac{\Delta h_2}{L_2}$$

$$k_{f1} \frac{\Delta h}{L_1} = \Delta h_2 \left(\frac{k_{f2}}{L_2} + \frac{k_{f1}}{L_1} \right) \Rightarrow \Delta h_2 = \frac{k_{f1} \frac{\Delta h}{L_1}}{\left(\frac{k_{f2}}{L_2} + \frac{k_{f1}}{L_1} \right)}$$

$$\Delta h_2 = \frac{0,0001 \cdot \frac{1,50}{30,00}}{\left(\frac{1,5 \cdot 10^{-7}}{0,50} + \frac{0,0001}{30,00} \right)} \Rightarrow \Delta h_2 = \frac{0,000005}{(0,0000003 + 0,00000333)}$$

$$\Delta h_2 = \frac{0,000005}{0,000003633} \Rightarrow \Delta h_2 = 1,376 \text{ m}$$

$$\Delta h_1 = \Delta h - \Delta h_2 \Rightarrow \Delta h_1 = 1,50 - 1,376 \Rightarrow \Delta h_1 = 0,124 \text{ m}$$

$$v_{f2} = k_{f2} \frac{\Delta h_2}{L_2} \Rightarrow v_{f2} = 1,5 \cdot 10^{-7} \frac{1,376}{0,50}$$

$$v_{f2} = 0,000000412 \text{ m/s}$$

$$Q = v_{f2} \cdot A$$

$$Q = 0,000000412 \cdot 4,00 \Rightarrow Q = 0,000001651 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}'$$

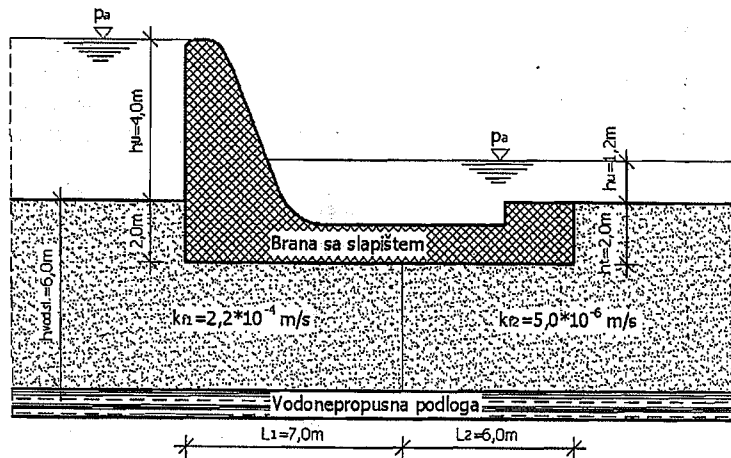
Zadatak 11.6.3.

Betonska brana sa slapištem (umirenje vodnog toka) izvedena je na vodotoku. Nakon izgradnje brane, dubina vode ispred nje (nivo gornje vode) iznosi $h_0=4,0$ m, dok je dubina donje vode (nizvodno od brane) $h_u=1,2$ m. Ispod temelja brane nalaze se vodonosni slojevi oznaka 1 i 2 (prema datoj slici) sa različitim koeficijentima vodopropusnosti k_{f1} i k_{f2} na dužinama L_1 i L_2 . Vodonosni sloj ispod brane ima debljinu 6,0 m dok se ispod njega nalazi vodonepropusni sloj tla (podloga). Brana je ukopana u tlo za debljinu 2,0 metra.

a) Izračunati odgovarajuće visine pritiska u vodonosnim slojevima 1 i 2, zatim brzinu filtracije podzemne vode i specifičan protok.

b) Izračunati ekvivalentni hidraulički koeficijent propusnosti $k_{f,eq}$ u m/s za čitavu dužinu procjeđivanja.

Zadato: $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$; $g=9,81 \text{ m/s}^2$; $L_1=7,0 \text{ m}$; $k_{f1}=2,2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$; $k_{f2}=5,0 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$; $L_2=6,0 \text{ m}$; $h_0=4,0 \text{ m}$; $h_u=1,2 \text{ m}$; $h_{\text{vod.sl.}}=6,0 \text{ m}$; $h_t=2,0 \text{ m}$.

**RJEŠENJE**

a) **Određivanje visina pritiska, brzine filtracije i specifičnog protoka:**

Pošto se ne mijenja poprečni presjek vodnog toka, imamo: $v_1=v_2$.

Primjenom Darcyevog zakona možemo napisati: $v = k \cdot I = k \frac{\Delta H}{\Delta L}$

$$k_{f1} \frac{h_1}{L_1} = k_{f2} \frac{h_2}{L_2}$$

$$\Delta h = h_1 + h_2 \Rightarrow h_1 = \Delta h - h_2$$

$$k_{f1} \frac{\Delta h - h_2}{L_1} = k_{f2} \frac{h_2}{L_2} \Rightarrow k_{f1} \frac{\Delta h}{L_1} - k_{f1} \frac{h_2}{L_1} = k_{f2} \frac{h_2}{L_2}$$

$$k_{f1} \frac{\Delta h}{L_1} = k_{f2} \frac{h_2}{L_2} + k_{f1} \frac{h_2}{L_1} \Rightarrow k_{f1} \frac{\Delta h}{L_1} = h_2 \left(\frac{k_{f2}}{L_2} + \frac{k_{f1}}{L_1} \right)$$

$$h_2 = \frac{k_{f1} \frac{\Delta h}{L_1}}{\frac{k_{f2}}{L_2} + \frac{k_{f1}}{L_1}}$$

$$L_1 = 2,0 + 7,0 = 9,0 \text{ m} \quad L_2 = 2,0 + 6,0 = 8,0 \text{ m}$$

$$\Delta h = h_0 - h_u = 4,0 - 1,2 = 2,8 \text{ m}$$

$$h_2 = \frac{2,2 \cdot 10^{-4} \frac{2,8}{9,0}}{\frac{5,0 \cdot 10^{-6}}{8,0} + \frac{2,2 \cdot 10^{-4}}{9,0}} = \frac{0,000068444}{0,00000625 + 0,000024444}$$

$$h_2 = 2,731 \text{ m}$$

$$h_1 = \Delta h - h_2 \Rightarrow h_1 = 2,8 - 2,731 \Rightarrow h_1 = 0,069 \text{ m}$$

$$v_f = k_{f1} \frac{h_1}{L_1} \Rightarrow v_f = 2,2 \cdot 10^{-4} \frac{0,069}{9,0} \Rightarrow v_f = 0,000001686 \text{ m/s}$$

$$Q = (h_{\text{vod.sl.}} - h_t) \cdot v_f \Rightarrow Q = (6,0 - 2,0) \cdot 0,000001686$$

$$Q = 0,000006744 \text{ m}^3 / \text{s} \cdot \text{m}$$

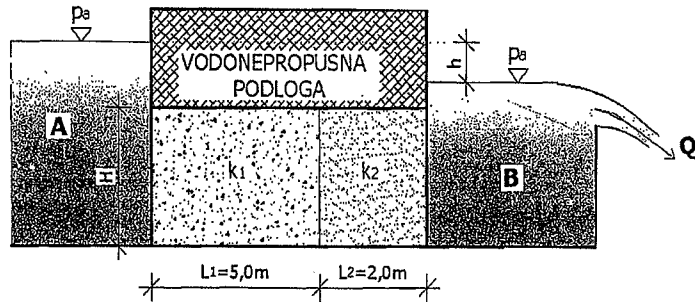
b) **Određivanje ekvivalentnog hidrauličkog koeficijenta vodopropusnosti:**

$$k_{f,eq} = v_f \frac{\Delta L}{\Delta h} = 0,000001686 \frac{(9,0 + 8,0)}{2,8}$$

$$k_{f,eq} = 0,000010236 \text{ m/s}$$

Zadatak 11.6.4.

Za stacionarni slučaj tečenja kroz poroznu sredinu širine $B=4,0$ m, sa koeficijentima vodopropusnosti $k_1=10^{-3}$ m/s i $k_2=10^{-2}$ m/s, izmjeren je protok vode $Q=0,007$ m³/s. Potrebno je odrediti razliku nivoa h u posudi A i B koja omogućava protjecanje zadatog protoka, kao i nacrtati pijeziometarsku liniju. Zadato: $H=4,0$ m ; $L_1=5,0$ m ; $L_2=2,0$ m.

**RJEŠENJE**

$$A = H \cdot B = 4,0 \cdot 4,0 \Rightarrow A = 16,0 \text{ m}^2$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0,007}{16,0} \Rightarrow v = 0,0004375 \text{ m/s}$$

$$v = k \cdot I = k \frac{\Delta h}{\Delta L}$$

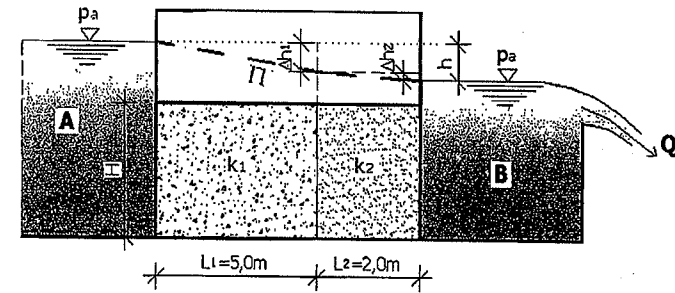
$$v_1 = k_1 \frac{\Delta h_1}{L_1} \Rightarrow k_1 \Delta h_1 = v_1 \cdot L_1 \Rightarrow \Delta h_1 = \frac{v_1 \cdot L_1}{k_1} = \frac{0,0004375 \cdot 5,0}{10^{-3}}$$

$$\Delta h_1 = 2,18 \text{ m}$$

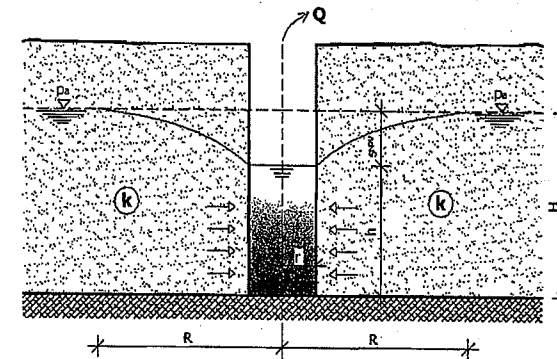
$$v_2 = k_2 \frac{\Delta h_2}{L_2} \Rightarrow k_2 \Delta h_2 = v_2 \cdot L_2 \Rightarrow \Delta h_2 = \frac{v_2 \cdot L_2}{k_2} = \frac{0,0004375 \cdot 2,0}{10^{-2}}$$

$$\Delta h_2 = 0,088 \text{ m}$$

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 \Rightarrow h = 2,18 + 0,088 \Rightarrow h = 2,268 \text{ m}$$

Pijeziometarska linija:**Zadatak 11.6.5.**

Na slici je prikazan savršeni bunar (filter po čitavoj dužini vodonosnog sloja) čiju izdašnost treba izračunati. Vodonosni sloj ima koeficijent propusnosti $k=2 \cdot 10^{-4}$ m/s, dok dubina podzemne vode u vodonosnom sloju iznosi $H=6,0$ m, a dubina vode u bunaru je $h=4,0$ m. Poluprečnik bunara iznosi $r=0,5$ m dok radijus uticaja bunara iznosi $R=120$ m. Za koliko će se promijeniti izdašnost bunara ako se njegov poluprečnik smanji na $r=0,3$ m uz iste naprijed navedene parametre?

**RJEŠENJE****Izdašnost savršenog bunara:**

$$Q = \pi \cdot k \frac{H^2 - h^2}{\ln \frac{R}{r}} \Rightarrow Q = \pi \cdot 2 \cdot 10^{-4} \frac{6,0^2 - 4,0^2}{\ln \frac{120}{0,5}} = \frac{0,01256}{5,4806}$$

$$Q = 0,00229 \text{ m}^3 / \text{s} = 2,29 \text{ l/s}$$

Izdašnost savršenog bunara ukoliko njegov unutarnji poluprečnik iznosi $r=0,3$ m (smanjenje poluprečnika bunara):

$$Q = \pi \cdot k \frac{H^2 - h^2}{\ln \frac{R}{r}} \Rightarrow Q = \pi \cdot 2 \cdot 10^{-4} \frac{6,0^2 - 4,0^2}{\ln \frac{120}{0,3}} = \frac{0,01256}{5,9915}$$

$$Q = 0,00209 \text{ m}^3 / \text{s} = 2,09 \text{ l} / \text{s}$$

$$\frac{2,09}{2,29} = 0,9126 \Rightarrow 1,0 - 0,9126 = 0,0874$$

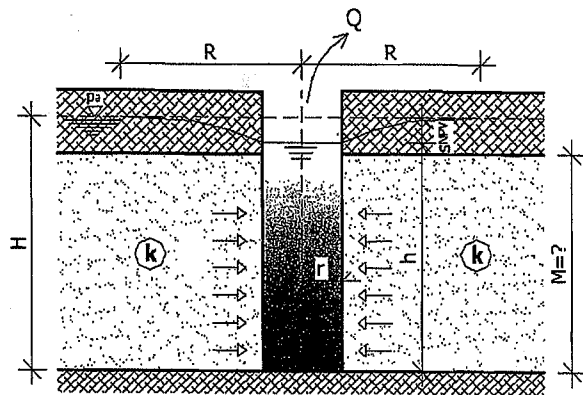
Objasnenje:

Odnos izdašnosti potpunog običnog bunara za date parametre uz smanjenje unutarnjeg poluprečnika bunara sa $r=0,5$ m na $r=0,3$ m iznosi 8,74 %.

Zadatak 11.6.6.

Na slici je prikazan savršeni bunar pod pritiskom iz koga se crpi $Q=0,005$ m³/s vode. Poluprečnik bunara iznosi $r=0,5$ m dok je radijus uticaja bunara $R=300$ m, a statički nivo podzemne vode nalazi se na dubini $H=14,0$ m. Koficijent vodopropusnosti porozne sredine iznosi $k=1,35 \cdot 10^{-4}$ m/s. Kota terena nalazi se na 1,5 m iznad statičkog nivoa podzemne vode.

- Odrediti debljinu sloja porozne sredine M ako nivo vode u bunaru iznosi $h=8,5$ m.
- Odrediti izdašnost bunara ukoliko je njegov poluprečnik $r=0,3$ m, a radijus uticaja $R=200$ m, uz prethodne parametre i prethodno izračunatu debljinu sloja porozne sredine M .



RJEŠENJE

a) Debljina sloja porozne sredine:

$$Q = 2\pi \cdot k \cdot M \frac{H-h}{\ln \frac{R}{r}} \Rightarrow 2\pi \cdot k \cdot M(H-h) = \ln \frac{R}{r} \cdot Q$$

$$M = \frac{\ln \frac{R}{r} \cdot Q}{2\pi \cdot k(H-h)} \Rightarrow M = \frac{\ln \frac{300}{0,5} \cdot 0,005}{2\pi \cdot 1,35 \cdot 10^{-4} (14,0 - 8,5)} = \frac{0,031985}{0,0046629}$$

$$M = 6,86 \text{ m}$$

Obzirom na date parametre i dobijenu debljinu porozne sredine od 6,86 m možemo zaključiti da je bunar subarteški savršeni bunar.

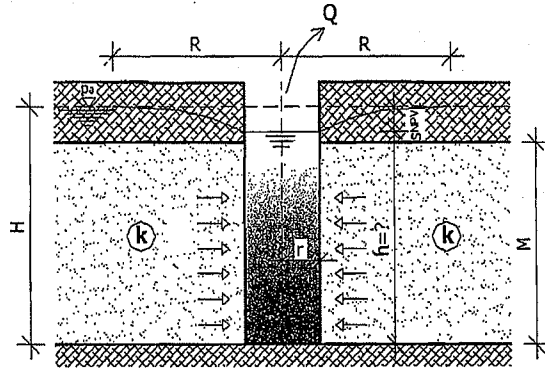
b) Izdašnost bunara uz smanjenje poluprečnika bunara i smanjenje radijusa uticaja bunara:

$$Q = 2\pi \cdot k \cdot M \frac{H-h}{\ln \frac{R}{r}} \Rightarrow Q = 2\pi \cdot 1,35 \cdot 10^{-4} \frac{14,0 - 8,5}{\ln \frac{200}{0,3}} = \frac{0,0046629}{6,50229}$$

$$Q = 0,000717 \text{ m}^3 / \text{s} = 0,717 \text{ l} / \text{s}$$

Zadatak 11.6.7.

Za prikazani savršeni bunar pod pritiskom potrebno je odrediti nivo vode u bunaru i sniženje nivoa vode u bunaru u odnosu na statički nivo podzemne vode koji iznosi $H=22,0$ m. Iz bunara se crpi količina vode $Q=80$ l/s, a unutarnji prečnik bunara je $r=0,5$ m, dok radijus uticaja iznosi $R=150$ m. Debljina porozne sredine (vodonosni sloj) iznosi $M=8,0$ m dok je koeficijent propusnosti porozne sredine $k=8 \cdot 10^{-4}$ m/s.

**RJEŠENJE****Određivanje nivoa vode u bunaru:**

$$Q = 2\pi \cdot k \cdot M \frac{H-h}{\ln \frac{R}{r}} \Rightarrow 2\pi \cdot k \cdot M(H-h) = \ln \frac{R}{r} \cdot Q$$

$$2\pi \cdot k \cdot M \cdot H - 2\pi \cdot k \cdot M \cdot h = \ln \frac{R}{r} \cdot Q \quad Q = 80 \text{ l/s} = 0,08 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$2\pi \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 8,0 \cdot 22,0 - 2\pi \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 8,0 \cdot h = \ln \frac{150}{0,5} \cdot 0,08$$

$$0,8842 - 0,04019h = 0,4563$$

$$-0,04019h = 0,4563 - 0,8842$$

$$-0,04019h = -0,4279 \quad / \cdot (-1)$$

$$0,04019h = 0,4279$$

$$h = \frac{0,4279}{0,04019} \Rightarrow h = 10,65 \text{ m}$$

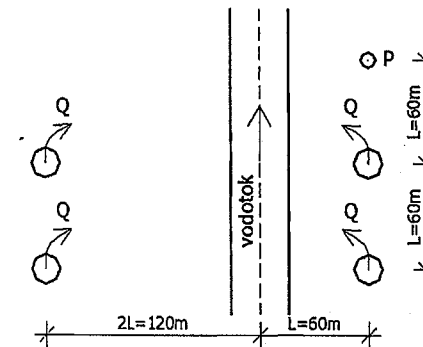
Određivanje sniženja nivoa vode u bunaru:

$$s_{NPV} = H - h \Rightarrow s_{NPV} = 22,00 - 10,65$$

$$s_{NPV} = 11,35 \text{ m}$$

Zadatak 11.6.8.

Četiri bunara su postavljena u vodonosni sloj sa slobodnim nivoom vode, prema datoj slici, sa međusobnim udaljenostima i udaljenostima od pijezometra. Po dva bunara se nalaze na obje strane vodotoka. Visina podzemne vode odnosno potencijal vodonosnog sloja prije početka crpljenja iznosi $H=12,0$ m. Iz navedenih bunara crpimo količinu vode od $Q=0,042$ m³/s. Radijus uticaja predmetnih bunara iznosi $R=450$ m, dok nivo vode (potencijal) u pijezometru iznosi $h_p=9,25$ m. Potrebno je odrediti koeficijent propusnosti vodonosnog sloja (k) kao i sniženje nivoa vode u pijezometru.

**RJEŠENJE****Obrazloženje:**

Pošto su dva bunara sa druge strane vodotoka onda ne utiču na sniženje nivoa vode, jer se pretpostavlja rubni uslov nepromjenjivosti potencijala na osovini vodotoka odnosno nema sniženja nivoa u vodotoku.

Promjena potencijala po Girinskom ΔP_{pot} :

Potencijal Girinskog se uvodi da bismo linealizirali problem strujanja (ovo važi za tečenje ili strujanje sa slobodnim nivoom vode na horizontalnoj podlozi).

$$P_{pot} = k \frac{h^2}{2} \quad h - \text{visina vodnog lica u nekoj tački ili vrijednost potencijala}$$

$$\Delta P_{pot} = P_{pot,max} - P_{pot} = k \left(\frac{H^2 - h^2}{2} \right) \quad \Delta P_{pot} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$$

Ako je problem strujanja (tečenja) linearan onda vršimo superpoziciju:

$$\Delta P_{pot} = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{R}{L} + \ln \frac{R}{2L} - \ln \frac{R}{\sqrt{(2L)^2 + L^2}} - \ln \frac{R}{\sqrt{(2L)^2 + (2L)^2}} \right)$$

$$\Delta P_{pot} = \frac{0,042}{2\pi} \left(\ln \frac{450}{60} + \ln \frac{450}{2 \cdot 60} - \ln \frac{450}{\sqrt{(2 \cdot 60)^2 + 60^2}} - \ln \frac{R}{\sqrt{(2 \cdot 60)^2 + (2 \cdot 60)^2}} \right)$$

$$\Delta P_{pot} = 0,0066878(2,015 + 1,322 - (-3,688) - (-4,158)) = 0,0066878 \cdot 11,183$$

$$\Delta P_{pot} = 0,07478$$

$$\Delta P_{pot} = \frac{k(H^2 - h_p^2)}{2} \Rightarrow 0,07478 = \frac{k(12,0^2 - 9,25^2)}{2}$$

$$0,07478 = \frac{k \cdot 58,4375}{2} \Rightarrow 58,4375 \cdot k = 0,14956$$

$$k = \frac{0,14956}{58,4375} \Rightarrow k = 0,00256 \text{ m/s}$$

Sniženje nivoa vode u piježometru:

$$s_{NPV, pijež} = H - h_p = 12,0 - 9,25$$

$$s_{NPV, pijež} = 2,75 \text{ m}$$

12. PRILOZI

Prilog broj 1: Karakteristične osobine vode u funkciji od temperature

OSOBINE VODE	O Z N A K A	JEDINICA MJERE	TEMPERATURA (°C)									
			0	5	10	15	20	25	30	40	50	60
Gustina	ρ	kg/m ³	999,87	999,99	999,70	999,13	998,23	997,07	995,67	992,24	988,07	983,24
Površinski napon	σ	10 ⁻³ N/m	75,6	74,9	74,2	73,5	72,7	72,0	71,2	69,6	67,9	66,2
Stišljivost	κ	10 ⁻⁹ m ² /N	0,49	0,48	0,47	0,46	0,45	0,45	0,44	0,43	0,43	0,43

Prilog broj 2: Gustina pojedinih fluida

MATERIJAL	GUSTINA (kg/m ³)
Čista voda na 0°C	999,87
Čista voda na 4°C	1000,00
Čista voda na 30°C	995,67
Led na 0°C	917,00
Morska voda 3,50% slanosti	1026,00
Morska voda 0,94% slanosti	1007,00
Živa na 20°C	13546,00
Lož ulje	800,00 - 900,00
Benzin	700,00
Vazduh (pri 1,013*10 ⁵ Pa i 10°C)	1,25

Prilog broj 3: Geometrijske karakteristike nekih površina

Geometrijski oblik	Površina	I_{xx}	I_{yy}	I_{xy}
	$A = a \cdot b$	$\frac{ba^3}{12}$	$\frac{ab^3}{12}$	0
	$A = \frac{a \cdot b}{2}$	$\frac{ba^3}{36}$	$\frac{ba^2}{72}(b-2d)$	
	$A = R^2 \pi$	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0
	$A = \frac{1}{2} R^2 \pi$	$0,1098R^4$	$0,3927R^4$	0
	$A = \frac{1}{4} R^2 \pi$	$0,05488R^4$	$0,05488R^4$	$-0,01647R^4$

Prilog broj 4: Moodyev dijagram

